Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
17/2/2020

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.

`Nome e cognome:`

`Numero di matricola:`

`Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):`

`sì` ☐ `no` ☐

Esercizio 1 (10 punti)**.** Sia $\alpha \geq 0$, e si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \sqrt{|x|} - x^2 + \alpha x^4 .$$

a) Al variare di α, si discutano la continuità e derivabilità di f, ed i suoi limiti per $x \to \pm\infty$.

b) Per $\alpha = 0$, si discutano il segno di f ed il numero e la natura dei suoi massimi e/o minimi locali e/o globali.

c) Per $\alpha = 8$, si discutano il segno di f ed il numero e la natura dei suoi massimi e/o minimi locali e/o globali.

d) (*) Si dimostri che il numero di zeri di f è una funzione decrescente di α quando α varia nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$.

e) (*) Si dimostri che il numero di massimi e minimi di f è una funzione decrescente di α quando α varia nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$.

Esercizio 2 (10 punti)**.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si discuta il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(\cos(e^x - 1)) + e^{x^2} - \cos(x^5) + \lambda\Big(\operatorname{sen}^3(x) + \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{6}\Big)}{x^n} .$$

Esercizio 3 (10 punti)**.**

a) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+t^2)u' + 2tu = 0 , \\ u(0) = 1 . \end{cases}$$

b) Dire, motivando la risposta, per quali funzioni derivabili u è verificata l'uguaglianza

$$u(t) = 1 - 2\int_0^t \frac{su(s)}{1+s^2}\, ds , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

c) Dire, motivando la risposta, quali funzioni v derivabili due volte risolvono il problema

$$\begin{cases} v'(t) = 1 - 2\displaystyle\int_0^t \frac{sv'(s)}{1+s^2}\, ds , \qquad t \in \mathbb{R} , \\ v(0) = 0 . \end{cases}$$