

Scritto per il corso di Analisi Matematica
corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Università di Pisa
27/1/2020

(Seconda parte)

Tempo a disposizione: 120 minuti.

E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Acconto che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):

sì no

Esercizio 1 (10 punti). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x - 3x^3 + x^5}{e^{x^2}}.$$

- Si dimostri che f è continua e derivabile in tutto il suo dominio, e si discutano i limiti di f a $\pm\infty$.
- Si trovi il numero di zeri di f .
- Si trovi il numero di massimi e minimi locali e globali di f , e si discuta la loro natura.

Esercizio 2 (10 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x) = e^x \sin(x)$.

- Si trovino $f^{(6)}(0)$ e $f^{(7)}(0)$.
- Si calcoli $f^{(n)}(0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- Si dimostri che $|f^{(n)}(0)| \leq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- Si dica qual è il raggio di convergenza della serie di Taylor associata ad f nel punto 0.
- Si trovi una formula per $f^{(n)}(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (10 punti). Sia data l'equazione differenziale omogenea

$$u'' + 2u' - \alpha u = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Trovare tutte le soluzioni u_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} u_\alpha(t) dt$$

converge per ogni soluzione u_α , e calcolarlo.

- Trovare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea

$$u'' + 2u' - \alpha u = e^t$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.