

Scritto per il corso di Analisi Matematica  
corso di laurea in Ingegneria Gestionale  
Università di Pisa  
7/1/2020

(Seconda parte)

*Tempo a disposizione: 120 minuti.*

*E' richiesto lo svolgimento degli esercizi con tutte le necessarie spiegazioni e motivazioni, in modo il più possibile rigoroso e leggibile.*

Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

Acconsento che il voto finale venga pubblicato sulla pagina web del docente (solo per i voti pari almeno a 15/30, e con il numero di matricola al posto del nome):

sì  no

**Esercizio 1** (12 punti). Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite come

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \geq 1, \end{cases} \quad f(x) = x(2 - e^{-x})g(x).$$

- Si dimostri che  $g$  è continua, e si dica in quali punti è derivabile.
- Si dimostri che  $f$  è continua, e si dica in quali punti è derivabile.
- Si discutano il segno di  $f$  ed i suoi limiti a  $\pm\infty$ .
- Si dica se  $f$  ammette massimo globale e/o minimo globale.
- Si mostri che  $f$  ammette almeno un massimo locale.
- Si discuta il numero totale di massimi e minimi locali e globali di  $f$ , e si discuta la loro natura.

**Esercizio 2** (8 punti). Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si discuta il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x^n},$$

essendo  $f$  definita in un intorno di 0 come

$$f(x) = \text{sen}(\arctan(x^2)) - e^x + \tan(x^2) - e^{-x} + 2 \cos(x).$$

**Esercizio 3** (10 punti). **a)** Si trovino tutte le coppie di soluzioni  $(u, v)$  del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -u. \end{cases}$$

b) Si trovi una coppia di soluzioni particolari  $(u_0, v_0)$  del sistema non omogeneo

$$\begin{cases} u' = v + \operatorname{sen} t, \\ v' = -u + \operatorname{cos} t. \end{cases}$$

c) Detta  $(u, v)$  una qualunque coppia di soluzioni del sistema *non* omogeneo, calcolare

$$\int_0^{2\pi} (u + v)(t) dt.$$