CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA), PRIMO SEMESTRE 2018–2019

Secondo compitino (17/12/2018)

Tempo a disposizione: 120 minuti.

Esercizio 1. Un semaforo rotto cambia colore ad ogni minuto. In particolare, se in un certo minuto è verde, allora al minuto successivo diventerà sicuramente giallo, se è giallo diventerà al 50% rosso e al 50% verde, e se è rosso diventerà sicuramente verde. Partendo da un dato istante arbitrario, definiamo X_i la variabile aleatoria che rappresenta il colore del semaforo dopo i minuti, con valori 0, 1 e 2 rispettivamente nel caso di semaforo verde, giallo e rosso.

(i) Si dimostri che le $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ rappresentano una catena di Markov, e si calcoli la relativa matrice di transizione.

(ii) Si calcoli la densità di X_2 in funzione di quella di X_0 (ossia la probabilità che il semaforo sia verde, giallo o rosso dopo 2 minuti, in funzione della probabilità che lo sia al minuto iniziale).

(iii) Si calcoli la densità di X_4 in funzione di quella di X_0.

(iv) Si vuole sapere quale fosse il colore all'istante iniziale; assegnata probabilità a priori pari ad 1/3 per ciascuno dei tre colori, come si deve modificare tale probabilità se dopo quattro minuti si osserva un semaforo giallo?

(v) Si supponga che la catena di Markov sia asintoticamente stazionaria. Quale dev'essere il vettore limite?

(vi*) E' vero per ogni dato iniziale X_0 che la catena sia asintoticamente stazionaria?

Esercizio 2. Sotto una strada rettilinea molto lunga passa una tubatura dell'acqua. Si sa che c'è una perdita, ma non si sa dov'è; si sa tuttavia che, quando si forma una crepa nell'asfalto, la sua distanza in metri dal punto esatto della crepa è minore di $x \in \mathbb{R}^+$ con probabilità

$$\frac{x^4 + 2x^2 + \alpha x}{(1 + x^2)^2},$$

con un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ che non conosciamo; inoltre, la crepa può formarsi indifferentemente più avanti o più indietro della perdita. Sia X la variabile aleatoria che esprime la posizione in cui si forma una crepa rispetto al punto della perdita.

(i) Si trovino i possibili valori di α affinché quella sopradetta sia effettivamente una probabilità.

(ii) Per ciascuno dei valori appena trovati, si dimostri che X è una variabile aleatoria assolutamente continua, e si calcolino la sua funzione di ripartizione e la sua densità.

(iii) Si calcolino valore atteso e varianza di X.

(iv) Supponiamo che si siano formate, nel tempo, un numero n di buche, ciascuna con posizione indipendente dalle altre. Per aggiustare la perdita, un ingegnere decide di rompere l'asfalto, facendo un buco di 10 centimetri di diametro centrato nel punto medio delle buche formatesi. Ci assicura che, considerando n abbastanza grande ed avendo quindi usato l'approssimazione del Teorema centrale del limite, ritiene di avere più del 96% di probabilità di trovare la perdita. Quante devono essere, come minimo, le buche? *(si può usare la tabella di valori fornita).*

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

FIGURE 1. Tabella di valori per la distribuzione normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.