

**CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA),
PRIMO SEMESTRE 2018–2019**

Prova scritta (19/6/2019)

Tempo a disposizione: 120 minuti.

Esercizio 1 (12 punti). Alice e Bruno si sfidano in una partita a dadi. Più precisamente, Alice lancia due dadi (con sei facce numerate da 1 a 6) mentre Bruno ne lancia uno solo. Alice vince la partita se il più alto dei suoi due dadi è *strettamente* più alto del dado di Bruno, mentre altrimenti vince Bruno.

- (1) Si calcoli la probabilità che vinca Alice.
- (2) Detta A la variabile aleatoria che indica il valore del più alto dei dadi di Alice, e B la variabile aleatoria che indica il valore del dado di Bruno, si calcoli $\mathbb{E}(A - B)$.
- (3) Si supponga ora che Alice lanci tre dadi, e Bruno ne lanci due, e di nuovo Alice vince se il più alto dei suoi dadi è *strettamente* più alto del più alto dado di Bruno. La probabilità di vincere, per Alice, è aumentata o diminuita rispetto a quella calcolata nel primo punto?

Esercizio 2 (10 punti). Sia X una variabile aleatoria che può ammettere due soli valori. Si supponga che $\mathbb{E}(X) = 0$ ed $\mathbb{E}(X^2) = 1$. Si mostri che $\mathbb{E}(X^3)$ può essere arbitrariamente grande; in altre parole, per qualunque numero $M \in \mathbb{R}$ si dimostri che $\mathbb{E}(X^3)$ può essere maggiore di M .

Esercizio 3 (8 punti). Sia X la variabile aleatoria così definita. Si lancia una moneta; se viene testa, si dà ad X il valore di una legge normale $\mathcal{N}(0, 1)$; se viene croce, si dà ad X il valore di una legge esponenziale di parametro $\lambda = 2$.

- (1) Si calcoli il valore atteso di X .
- (2) Si calcoli la varianza di X .
- (3) Si dica se X è una variabile aleatoria assolutamente continua, ed in caso affermativo si calcoli la sua densità.