

**CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA),  
PRIMO SEMESTRE 2018–2019**

**Prova scritta (18/1/2018)**

*Tempo a disposizione: 120 minuti.*

**Esercizio 1** (6 punti). Sia  $X$  una variabile aleatoria, e si supponga che

$$\mathbb{E}(X) = 1, \quad \text{Var}(X) = 2, \quad \mathbb{E}(X^4) = 10.$$

Si trovi  $\text{Var}(X^2)$ .

**Esercizio 2** (12 punti). Sia  $X$  una variabile aleatoria assolutamente continua avente densità  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  di classe  $C^1$ . Si definisca  $Y = \arctan X$ .

- (i) Si dimostri che  $Y$  è una variabile aleatoria assolutamente continua, e si calcoli la sua densità  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  in dipendenza da  $f$ .

Si definisca ora

$$f(x) = \frac{\alpha}{1+x^2} e^{-\arctan x},$$

essendo  $\alpha > 0$  un'opportuna costante.

- (ii) Si calcoli  $g$ .  
(iii) Si dica quanto vale  $\alpha$ .  
(iv) Si calcolino  $\mathbb{E}(Y)$  e  $\text{Var}(Y)$ .

**Esercizio 3** (12 punti). Tre sacchetti contengono palline rosse e verdi. Più precisamente, il sacchetto  $A$  contiene una pallina rossa ed una verde, il sacchetto  $B$  contiene una pallina rossa e due verdi, ed il  $C$  contiene due palline rosse ed una verde. Si sceglie a caso un sacchetto, e si estraggono tre palline con reimmissione: due delle tre sono verdi ed una è rossa.

- (i) Quali sono le probabilità di aver scelto il sacchetto  $A$ , o  $B$ , o  $C$ ?  
(ii) Qual è la probabilità che, estraendo una nuova pallina dallo stesso sacchetto, sia rossa?

*Si lancia ora una moneta: se esce testa si tiene il sacchetto scelto all'inizio, se esce croce lo si mette via e si prende a caso uno degli altri due. Dette  $R$  e  $V$  il numero di palline rosse e verdi di questo sacchetto, si deve pagare una cifra  $Y$ , pari a*

$$Y = \begin{cases} R - V & \text{se } R \geq V, \\ \lambda(V - R) & \text{se } R < V, \end{cases}$$

*dove  $\lambda > 0$  è un numero fissato.*

- (iii) Se  $\lambda = 1$ , è preferibile che sia uscito testa o croce?  
(iv) Quanto vale  $\mathbb{E}(Y)$  se è uscito testa? E se è uscito croce?  
(v) Esiste un  $\lambda$  tale che  $Y$  ed  $X$  sono indipendenti, essendo  $X$  pari a 0 oppure 1 se è uscito testa o croce rispettivamente?