

**CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA),
PRIMO SEMESTRE 2018–2019**

Prova scritta (11/2/2018)

Tempo a disposizione: 135 minuti.

Esercizio 1 (9 punti). Alberto ed altri tre studenti si presentano ad uno scritto, che consiste nel rispondere a 10 quesiti a risposta “sì–no”: per passare l’esame è necessario rispondere correttamente ad almeno 7 dei quesiti. Non avendo studiato, tutti e quattro decidono di rispondere a caso, avendo dunque il 50% di probabilità di indovinare ciascuna risposta, indipendentemente dalle altre.

- (i) Si dica la probabilità che ogni studente ha di passare l’esame.
- (ii) Alla correzione, agli studenti viene detto che uno solo di loro ha superato l’esame. Controllando i risultati, si scopre che dei quattro studenti solo Alberto ha risposto correttamente alla prima domanda. Qual è la probabilità che sia lui lo studente che ha superato l’esame?

Esercizio 2 (10 punti). Una variabile aleatoria assolutamente continua X ha densità

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & x \notin (0, \alpha), \end{cases}$$

per un certo parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) Si calcoli il valore di α .
- (ii) Si calcoli la funzione di ripartizione di X .
- (iii) Si calcolino il valore atteso e la varianza di X .
- (iv) Se Y è una variabile aleatoria assolutamente continua indipendente da X e con la stessa densità, si dimostri che anche la variabile aleatoria $Z = X + Y$ è assolutamente continua, e si calcoli la sua densità.

Esercizio 3 (11 punti). Una ditta produce aghi per siringhe con un macchinario, dal quale si ottengono aghi che hanno lunghezze indipendenti, distribuite con ottima approssimazione secondo una legge Gaussiana di media 10 centimetri e scarto quadratico medio 1 mm.

- (i) Qual è la probabilità che un ago uscito dal macchinario abbia lunghezza maggiore di 10.1 centimetri?
- (ii) Determinare il numero $\ell > 0$ tale che un ago uscito dal macchinario abbia lunghezza compresa tra $10 - \ell$ e $10 + \ell$ centimetri con una probabilità del 99%.
- (iii) La ditta deve spedire agli ospedali pacchi con i suoi aghi. In base al contratto, almeno il 98% dei pacchi devono avere aghi aventi lunghezza media tra 9.99 e 10.01 centimetri. Quanti aghi devono essere messi, come minimo, in ogni pacco?

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

FIGURE 1. Tabella di valori per la distribuzione normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.