CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA), PRIMO SEMESTRE 2018–2019

Prova scritta (10/7/2019)

Tempo a disposizione: 135 minuti.

Esercizio 1 (10 punti)**.** Una scatola contiene lampadine di due tipi: la durata in anni delle lampadine del primo tipo è una legge esponenziale di parametro $\lambda = 3$, mentre quella delle lampadine del secondo tipo è una legge uniforme in un intervallo tra gli 0 ed i 10 anni. Le lampadine dei due tipi sono presenti nella scatola in egual numero, e sono indistinguibili.

(1) Si dica qual è il valore atteso della durata di una lampadina presa a caso, e qual è la relativa varianza.
(2) Si supponga che una lampadina presa a caso sia ancora funzionante dopo 5 anni. Si dica qual è la probabilità che fosse del primo o del secondo tipo.
(3) Sempre sotto le ipotesi del punto precedente, si dica qual è il valore atteso della durata *residua* della lampadina.

Esercizio 2 (10 punti)**.** Una partita di calcio in un torneo ad eliminazione diretta termina ai calci di rigore. Questo vuol dire che ogni squadra batte cinque rigori e vince quella che ne ha segnati di più; in caso di parità dopo i cinque rigori ciascuno, entrambe le squadre battono un sesto rigore; se solo una squadra ha segnato il sesto rigore ha vinto, altrimenti se ne batte un settimo e così via fino a che una squadra risulta vincitrice. Si supponga che ogni giocatore riesca a segnare nell'80% dei casi, e che i tiri siano tutti indipendenti.

(1) Si dica qual è la probabilità che la sfida non sia terminata dopo i primi 5 rigori ciascuno.
(2) Nel caso in cui dopo i primi 5 rigori il risultato sia ancora di parità, si dica qual è la probabilità che servano più di 15 rigori totali per squadra prima che ci sia un vincitore.

Esercizio 3 (10 punti)**.** In una certa località, se un giorno è piovuto vi è una probabilità 1/3 che piova anche il giorno successivo, mentre se non è piovuto la probabilità è di 1/5.

(1) Detta X_j la variabile aleatoria che vale 0 oppure 1 se nel giorno j-esimo ha piovuto oppure no, si dimostri che $\{X_j\}$ rappresenta un processo di Markov asintoticamente stazionario, e si dica quanto vale il vettore limite v_∞.
(2) Assumendo per semplicità che la legge di ogni X_j corrisponda a quella limite, si dica qual è il numero medio m di giorni di pioggia in un anno (di 365 giorni).
(3) Utilizzando il Teorema Centrale del Limite, si dica qual è la probabilità che il numero effettivo di giorni di pioggia in un anno sia almeno $2m$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

Figure 1. Tabella di valori per la distribuzione normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.