CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA), PRIMO SEMESTRE 2018–2019

Prova scritta (9/9/2019)

Tempo a disposizione: 135 minuti.

Esercizio 1 (10 punti)**.** In un torneo di bocce, otto giocatori si sfidano ad eliminazione diretta in partite uno contro uno (vi sono quindi quattro quarti di finale, due seminfinali ed una finale). Il tabellone è stabilito con un sorteggio.

(1) Sapendo che tra gli otto giocatori vi sono due fratelli, e supponendo che i giocatori siano tutti di pari abilità, dire qual è la probabilità che i due fratelli giochino uno contro l'altro.
(2) Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui i giocatori siano 16 invece che 8, sempre con due fratelli.
(3) Si calcoli infine la probabilità nel caso di un torneo con 128 giocatori.

Esercizio 2 (12 punti)**.** Alessandra e Beatrice si sfidano a carte. Ognuna mescola un mazzo di 40 carte, e ne prende cinque a caso; l'obiettivo di Alessandra è fare almeno una coppia, quello di Beatrice di fare almeno un tris. Se Alessandra non ha una coppia e Beatrice non ha un tris, così come se Alessandra ha una coppia e Beatrice ha un tris, la partita finisce in parità. Se Alessandra ha una coppia e Beatrice non ha un tris, Alessandra vince 10 euro. Se infine Alessandra non ha una coppia mentre Beatrice ha un tris, quest'ultima vince una somma pari a λ euro.

(1) Si dica qual è il valore di λ tale che il gioco sia equo.
(2) In corrispondenza a tale valore di λ, si calcolino il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria X che rappresenta la vincita di Alessandra (dunque X è pari a 0 in caso di parità, a 10 in caso di vittoria di Alessandra, ed a $-\lambda$ in caso di vittoria di Beatrice).
(3) Alessandra e Beatrice giocano 1000 partite; tuttavia, il mazzo di Beatrice è truccato, e dunque quest'ultima è in grado di vincere quanto voglia. Per non destare sospetti, decide però di assicurarsi una vincita che non venga considerata troppo fortunata: più precisamente, utilizzando l'approssimazione del Teorema Centrale del Limite, Alessandra deve ritenere che ci fosse una probabilità del 20% che la partita le andasse ancora peggio. Si dica quanto può essere al massimo la vincita di Beatrice.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Da un lago affiorano cinque sassi allineati. Un rana si trova sul sasso centrale (avendone quindi due davanti e due dietro). Ogni minuto, la rana fa un salto, che può essere al 50% in avanti ed al 50% all'indietro, e che la fa atterrare sul sasso successivo in quella direzione, se ve ne sono ancora, o in acqua altrimenti. Una volta caduta in acqua, la rana non è più in grado di uscirne.

(1) Si mostri che la posizione della rana, opportunamente descritta, è un processo di Markov, e si scriva la matrice di transizione associata.

(2) Si dica se il processo è asintoticamente stazionario, ed in caso affermativo si calcoli il vettore limite.

(3) Sapendo che dopo cinque minuti dall'inizio la rana si trova su un sasso e non in acqua, si calcoli la probabilità che essa finisca in acqua nel minuto successivo.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

FIGURE 1. Tabella di valori per la distribuzione normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.