CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA), PRIMO SEMESTRE 2018–2019

Foglio Esercizi N. 9 (11/12/2018)

Esercizio 1. Il comune decide di accendere sul corso principale delle lucine per Natale. Si sa che ciascuna lucina, indipendentemente dalle altre, ha una probabilità dell'80% di restare accesa fino alla fine delle feste, e d'altra parte l'immagine del corso è accettabile purché almeno i 3/4 delle lucine restino accese fino alla fine. Qual è il numero minimo di lucine da accendere per avere almeno il 99% di probabilità che ciò avvenga? Si supponga che il numero sia abbastanza alto da poter utilizzare l'approssimazione data dal Teorema centrale del limite.

Esercizio 2. Uno speleologo deve passare un lungo periodo in una grotta, e si porta dietro 100 lampadine. La durata in giorni di ciascuna lampadina è data da una variabile aleatoria assolutamente continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{se } 0 \le x \le 2\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Supponendo che lo speleologo accenda immediatamente una lampadina non appena la precedente si è esaurita, di quanti giorni deve programmare la sua permanenza nella grotta per avere almeno il 95% di probabilità di non restare al buio? Si può utilizzare l'approssimazione data dal Teorema centrale del limite.

Esercizio 3. Siano a e b due numeri reali, e si definisca $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $F(x) = a + b \arctan(x)$. Si determinino a e b in modo che F sia la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria assolutamente continua. Si trovino il valore atteso e la varianza (se esistono) di tale variabile aleatoria.

Esercizio 4. Siano α, $p \in \mathbb{R}^+$, e si definisca

$$g(x) = \frac{\alpha}{1 + |x|^p}\,.$$

Si dica per quali valori dei parametri α e p la funzione g è la densità di una variabile aleatoria assolutamente continua. Si discuta inoltre se tale variabile aleatoria ha un valore atteso, o una varianza, finiti, e calcolarli.

Esercizio 5. Una compagnia elettrica ha 20.000 clienti, e sa che ciascuno telefona mediamente una volta l'anno in un momento casuale: il call-center è attivo 210 giorni l'anno, per 8 ore al giorno. Sapendo che ogni telefonata dura in media cinque minuti, l'azienda vuole sapere il numero minimo di centralinisti che deve avere attivi in modo che ogni persona che telefona abbia almeno il 90% di probabilità di ricevere immediatamente risposta. *(si cerchi di risolvere il problema senza utilizzare una calcolatrice).*

Esercizio 6. Uno studente di informatica che non ha ricevuto nessun invito per una festa di capodanno decide di andare in un casinò per giocare alla roulette. Essendo prudente, decide di giocare solo un euro alla volta, puntando sempre su un numero secco (quindi, con probabilità $1/37$ vince 35 euro, e con probabilità $36/37$ perde un euro).

i) Supponendo che durante la notte faccia 1000 giocate, qual è la probabilità che torni a casa avendo globalmente vinto?

ii) Come diventa la probabilità se si appassiona al gioco e torna nei giorni successivi, facendo complessivamente 10000 giocate?

iii) Quante volte deve giocare per avere il 99% di probabilità di avere globalmente perso? Qual è il valore atteso della sua perdita con questo numero di giocate?