

**CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA),
PRIMO SEMESTRE 2018–2019**

Foglio Esercizi N. 8 (4/12/2018)

Esercizio 1. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, entrambe con legge normale $\mathcal{N}(0, 1)$ (dove $\mathcal{N}(c, \sigma)$ indica come al solito una Gaussiana di centro c e varianza σ^2). Si dimostri che anche la variabile aleatoria $Z = X + Y$ è una Gaussiana, con legge $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$. Più in generale, si mostri che se X ed Y sono due variabili aleatorie indipendenti e Gaussiane con leggi rispettivamente $\mathcal{N}(c_1, \sigma_1)$ e $\mathcal{N}(c_2, \sigma_2)$ allora la variabile aleatoria $X + Y$ ha legge normale $\mathcal{N}(c_1 + c_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Esercizio 2. Armando e Bruno fanno una gara di corsa di 100 metri. Il tempo finale di ciascuno dei due è una variabile aleatoria uniforme tra i 12 ed i 15 secondi. Supponiamo che i due risultati siano indipendenti.

- i) Si calcolino il valore atteso e la varianza del tempo del vincitore.
- ii) Supponendo che il vincitore finisca in un tempo minore di 13 secondi, si calcoli la probabilità che il secondo classificato finisca dopo più di 14 secondi.

Esercizio 3. Una ditta produce rilevatori di fumo. Ad un certo momento, dovendone spedire uno ad un cliente, ne possiede solo due in magazzino, e sa che uno funziona alla perfezione (cioè se c'è un incendio suona certamente), mentre l'altro funziona solo in parte, ossia se c'è un incendio suona nel 90% dei casi (e i funzionamenti in casi diversi sono eventi indipendenti). Non sapendo quale dei due sia l'uno e quale l'altro, e volendo naturalmente spedire quello perfettamente funzionante, fa un singolo test su uno dei due, accendendogli vicino un fiammifero, ed osservando che suona.

- i) Qual è la probabilità che il rilevatore testato sia quello perfettamente funzionante?
- ii) Si fanno altri 9 test, tutti sullo stesso rilevatore, e si osserva che suona in tutti e 9 i casi (quindi in totale sono stati positivi 10 test su 10). Qual è diventata la probabilità che sia quello perfettamente funzionante?
- iii) Si ha il tempo di effettuare solo un ultimo test prima della spedizione. Per rendere minima la probabilità di spedire quello sbagliato, è più conveniente effettuare anche questo undicesimo test sullo stesso rilevatore, oppure sull'altro?

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[-1, 1]$, ed Y una variabile aleatoria Gaussiana con legge $\mathcal{N}(0, 1)$, indipendente da X . Si calcolino la speranza e la varianza di $X + Y$ e di $X \cdot Y$.