

**CORSO DI CPS (CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA),  
PRIMO SEMESTRE 2018–2019**

**Foglio Esercizi N. 6 (6/11/2018)**

**Esercizio 1.** Una piazza tonda ha il bordo esterno lastricato con 100 mattonelle uguali. Uno studente di informatica, dopo aver bevuto qualche bicchiere di troppo, cammina sul bordo della piazza. Ogni secondo, egli fa un passo spostandosi di una mattonella, con probabilità  $1/2$  nel verso orario e con probabilità  $1/2$  nel verso antiorario.

- (i) Si dica se la sua posizione nel tempo è una catena di Markov.
- (ii) Si calcoli il vettore delle probabilità della sua posizione dopo un minuto.
- (iii) Si dica se la catena è asintoticamente stazionaria e, in caso affermativo, si calcoli il vettore limite delle probabilità.

**Esercizio 2.** Una squadra di calcio gioca un campionato con 24 squadre (e dunque gioca in tutto 46 partite). Dalla seconda partita in poi, il risultato di ogni partita influenza quello della successiva: più precisamente, se una partita è stata vinta, allora la partita successiva verrà vinta con probabilità  $1/2$  e pareggiata con probabilità  $1/2$ ; se è stata persa, la successiva verrà persa con probabilità  $1/2$  e pareggiata con probabilità  $1/2$ ; se è stata pareggiata, la successiva verrà pareggiata con probabilità  $1/2$  e vinta e persa con probabilità  $1/4$  ciascuna.

- (i) Si dica se i risultati delle partite formano una catena di Markov.
- (ii) Sapendo che la prima partita è stata vinta, si dica la probabilità che venga persa l'ultima partita del campionato.
- (iii) Si dica se (immaginando un numero arbitrario di campionati, ciascuno dei quali inizia da dove il precedente era terminato) la catena è asintoticamente stazionaria e, in caso affermativo, si calcoli il vettore limite delle probabilità.

**Esercizio 3.** Un giocatore d'azzardo possiede un euro. Ogni sera va a giocare e può raddoppiare o dimezzare i soldi che possiede, con probabilità entrambe  $1/2$ . Si dica se le variabili aleatorie dei soldi che possiede alla fine di ogni giornata formano o meno una catena di Markov, ed in caso affermativo si dica se è asintoticamente stazionaria ed eventualmente si calcoli il vettore limite.