

# ANALISI MATEMATICA B

## LEZIONE 18 - 31.10.2025

### LIMITI

$$f(x) \rightarrow l \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se fosse } f(x_0) = l \\ f \text{ sarebbe continua} \\ \text{in } x_0 \end{cases}$$

$$\text{Es } \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0$$



### Teorema [unicità del limite]

Se  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ ,

$$A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$$

$$f: A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

e  $x_0$  è punto di accumulazione per  $A$

(significa che ogni intorno di  $x_0$  contiene punti di  $A \setminus \{x_0\}$ )

se

$$f(x) \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$\text{e } f(x) \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

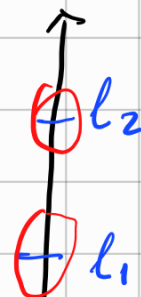
allora  $l_1 = l_2$ .

dim per assurdo sia  $l_1 \neq l_2$

posso trovare  $V_1 \in \mathcal{U}_{l_1}$  e  $V_2 \in \mathcal{U}_{l_2}$  disgiunti  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

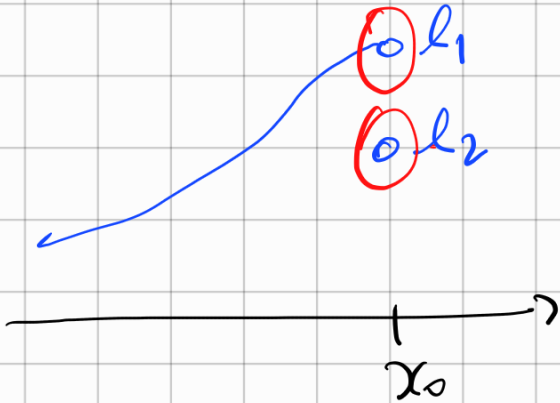
ma per  $x \rightarrow x_0$  trovo  $U_1 \in \mathcal{U}_{x_0}$  e  $U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$

tali che  $f(U_1) \subseteq V_1$ ,  $f(U_2) \subseteq V_2$



$$f(U_1 \cap U_2) \subseteq V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

ma  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  e  $x_0$  è punto di accumulazione (perché  $U_1 \cap U_2$  è un intorno di  $x_0$ , cioè contiene un intorno basilare) ASSURDO  $\square$



OS Devo fissare una estensione di  $\mathbb{R}$ .

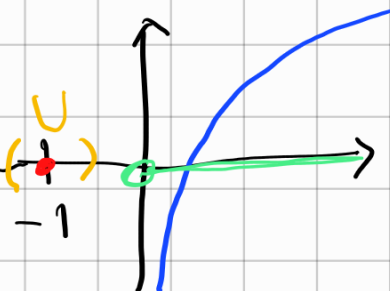
$$\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

non li considero se  
voglio unicità

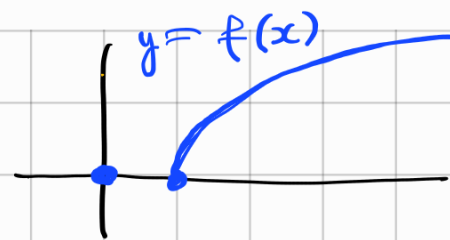
$$\log_2 x \rightarrow 42 \quad \text{e} \quad \log_2 x \rightarrow 7 \quad \text{per } x \rightarrow -1$$

-1 non è  
punto di accumulazione  
per  $A = (0, +\infty)$



Es  $f(x) = \sqrt{(x-1)x^2}$

$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad A = \{0\} \cup [1, +\infty)$



$f$  è continua! (verificare che è continua in  $x=0$ )

$f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$

ma 0 non è punto di accumulazione per  $A$ .

def [operatore lim] Se  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  punto di

accumulazione per  $A$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  allora

se  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$  scriveremo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Per l'unicità del limite questa definizione è ben posta.

(MA) in generale il limite può non esistere.

Es  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

ma  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  non esiste

$\uparrow$   
Fissato

invece  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ .

Oss  $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  Chi sono i punti di accumulazione di  $A$ ?



$+\infty \in \bar{\mathbb{R}}$  è l'unico punto di accumulazione.

## OPERAZIONI CON I LIMITI

Lezione scorsa: composizione di funzioni continue è continua.

Es  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{1+2^{x-3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$  [ LIMITE PER SOSTITUZIONE ]

$$f(x) = \sqrt{1+2^{x-3}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 \xrightarrow{f_4} \mathbb{R} \\ x \mapsto & x-3 & \mapsto & 2^{x-3} & \mapsto & 1+2^{x-3} & \mapsto \sqrt{1+2^{x-3}} \\ & t \mapsto 2^t & & t \mapsto 1+t & & t \mapsto \sqrt{t} & \end{array}$$

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

$f_1, f_2, f_3, f_4$  sono funzioni elementari, so che sono continue

$\stackrel{\text{Teo}}{\Rightarrow} f$  è continua.

$\forall x_0 \in \text{dom}(f)$

$$f(x) \rightarrow f(x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

È EQUIVALENTE ALLA CONTINUITÀ!

$\forall x_0$  punto di accumulazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Es

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ha senso se penso che  $1+x$  può essere  
estesa con continuità a  $+\infty$  ponendo

$$1+x = +\infty \quad \text{se } x = +\infty$$

e  $\frac{1}{t}$  può essere estesa con continuità  
a  $t = +\infty$  ponendo  $\frac{1}{t} = 0$ .

Teorema (somma e prodotto di funzioni  
continue è una funzione continua)

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni  
continue in  $x_0 \in A$ .

Allora  $f+g$  e  $f \cdot g$  sono continue  
nel punto  $x_0$ .

DEFINIZIONE  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Non solo se  $A \subseteq \mathbb{R}$   $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

vale lo stesso A MENO CHE non

trovo una FORMA INDETERMINATA:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty),$$

$$0 \cdot +\infty, \quad +\infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0$$

Es Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \left[ \frac{1}{0^+ + 0^+} = \frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\boxed{\text{Nota} \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad a-b = a+(-b)}$$

$$\text{Es Calcolare} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{+\infty} = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

Nella pratica

Teorema (limiti di somma e prodotto)

$$\text{se } f(x) \rightarrow a \text{ e } g(x) \rightarrow b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{per } x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{allora } f(x) + g(x) \rightarrow a + b$$

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow a \cdot b$$

A MENO CHE

non ci sia una forma indeterminata.

Visto che  $a-b = a+(-b)$  anche  $(+\infty)-(+\infty)$   
 $(-\infty)-(-\infty)$   
sono forme indeterminate.

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$   $\frac{+\infty}{\pm\infty}$   $\frac{0}{0}$  sono forme indeterminate.

---

dim  $f(x) + g(x)$  è continua in  $x_0$ ?

Se  $V$  è un intorno di  $f(x_0) + g(x_0)$   
devo trovare  $U$  intorno di  $x_0$   
per cui

$$f(U) + g(U) \subseteq V.$$

ma  $\forall V_1 \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$   
 $\forall V_2 \in \mathcal{U}_{g(x_0)}$

$\exists U_1 \text{ t.c. } f(U_1) \subseteq V_1$   
 $\exists U_2 \text{ t.c. } f(U_2) \subseteq V_2$

$$\Rightarrow f(U_1) + f(U_2) \subseteq V_1 + V_2 \stackrel{?}{\subseteq} V$$

$$f(x_0) \in \mathbb{R}, g(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_0) + g(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \varepsilon_2 > 0$$

$$\text{t.c. se } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1 \text{ e } |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2$$

$$\text{allora } |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$$

se solo  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$ .

Baschieri: per ottenere un errore  $< \epsilon$  sulla somma basta avere un errore  $< \frac{\epsilon}{2}$  su due addendi.

Dovrei fare anche i casi  $l + (+\infty)$ ,  $(+\infty) + (+\infty)$

Baschieri: per ottenere qualcosa di arbitrariamente grande in una somma  $l + (+\infty)$

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) > M & \text{ se } f(x) > f(x) - 1 \\ & \text{ e } g(x) > M - f(x) + 1 \end{aligned}$$

---

Per il prodotto se  $f(x_0), g(x_0) > 0$

posso usare il logaritmo!

$$\log_2 f(x) \cdot g(x) = \log_2 f(x) + \log_2 g(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = 2^{\log_2 f(x) + \log_2 g(x)}$$

$\uparrow$   
è continua.

Se  $f(x_0) < 0$  cambio segno

Se  $g(x_0) < 0$  cambio segno

Se  $f(x_0) = 0$  e  $g(x_0) \in \mathbb{R}$

devo mostrare che il limite è 0

$$|f(x)g(x)| < \varepsilon \quad \text{w.} \quad |g(x)| \leq M$$

Abbiamo anti mostrato che:  $e \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \square$

Teorema [linearità per infinitesimo]

Se  $f(x_0) = 0$  e  $|g(x)| \leq M$  (limitata)

allora  $f \cdot g$  è continua in  $x_0$ .

over  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

$\uparrow$   
infinitesima

$\nwarrow$  limitata

Es  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$$|\sin x| \leq 1 \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow +\infty$$

(Auch so  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  non esiste)