

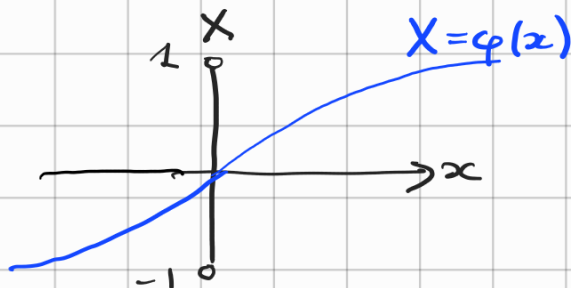
ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 17 - 29.10.2025

Esercizio

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

$$X = \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



è invertibile: $\varphi^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

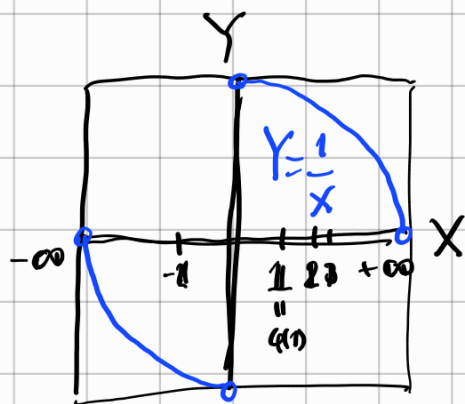
$$x = \varphi^{-1}(X) = \frac{X}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$\bar{\varphi}: \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$$

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{se } x = +\infty \\ -1 & \text{se } x = -\infty \end{cases}$$

- Disegnare il grafico di $y = \frac{1}{x}$ nelle coordinate X, Y

$$x = \pm \sqrt{x^2}$$



$$Y = \varphi(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}+1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-y^2}}}$$

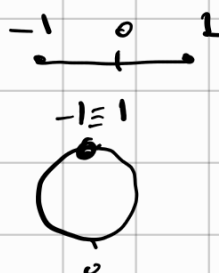
$$x = \bar{\varphi}^{-1}(Y)$$

$$Y = \pm \sqrt{1-X^2}$$

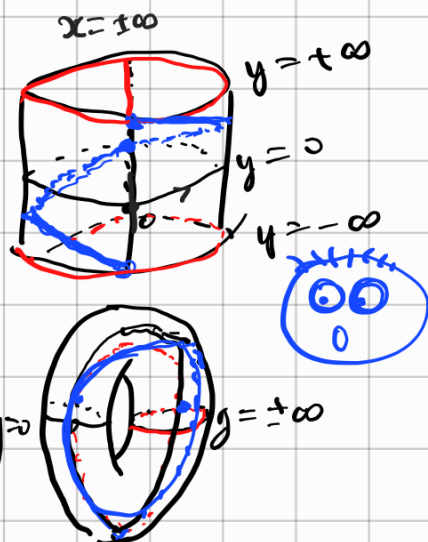
$$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \bar{\mathbb{R}} \xrightarrow{\bar{\varphi}} [-1, 1]$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \bigcirc$$

$$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$



$$\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \cong \mathbb{S}^2$$



LIMITI

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad l \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}: A \cup \{x_0\} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

ES
 $f(x) = \frac{1}{x}$

$$x_0 = 0$$

$$x_0 = +\infty$$

Diremo che $f(x)$ tende ad l per x che tende a x_0 e scriveremo:

$$f(x) \rightarrow l \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se $\tilde{f}$ è continua in x_0 .

Come si scrive con gli ε e δ ?

Caso 1: $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$

$\tilde{f}$ continua in x_0

$$\left[\begin{array}{c} \Downarrow \\ \forall V \in \mathcal{U}_{\tilde{f}(x_0)} \exists U \in \mathcal{U}_{x_0}: \tilde{f}(U) \subseteq V \\ \Updownarrow \end{array} \right]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \cup \{x_0\}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow \quad \text{tolgo } x = x_0 \Rightarrow \tilde{f} = f \quad \tilde{f}(x_0) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \setminus \{x_0\}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$x = x_0$ è
sempre verificata

DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI LIMITE $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$

Ma ci sono altri 24 casi:

$$\begin{array}{l} \vdots \quad \left. \begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \\ f(x) \rightarrow l \end{array} \right\} \xrightarrow{14} \left[\begin{array}{ccccc} -\infty & x_0^- & x_0 & x_0^+ & +\infty \\ -\infty & \cancel{l^-} & l & \cancel{l^+} & +\infty \end{array} \right] \\ x_0 = -\infty \quad l = 0 \end{array}$$

$$\forall V \in \mathcal{U}_l \exists U \in \mathcal{U}_{-\infty} \tilde{f}(U) \subseteq V$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in A: x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

DEF. EQ.

$$x_0 = -\infty$$

$$l \in \mathbb{R}$$

$$A \setminus \{-\infty\} = A$$

$$M \in \mathbb{R}$$

DEFINIZIONE TOPOLOGICA DI LIMITE:

$$f(x) \rightarrow l \text{ per } x \rightarrow x_0$$



$$\forall V \in \mathcal{U}_l \exists U \in \mathcal{U}_{x_0}: f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$$

ES $\left[\frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow -\infty \right]$ significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R}: x < -M \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Scegliamo $M > 0$ così: $x < -M < 0$

$$|x| = -x > 0$$

$$\left(\frac{1}{x} \right) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{-x} < \varepsilon \Leftrightarrow -x > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > M \\ M > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \Leftrightarrow x < -M$$

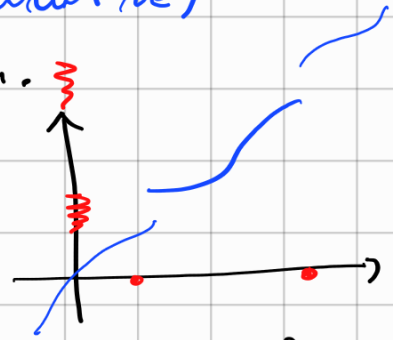
$\forall \varepsilon > 0$ scegliamo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ e l'implicazione vale!

- OBIETTIVO ① (quasi) tutte le fn elementari sono continue
 ② composizione di fn. continue è una fn continua.

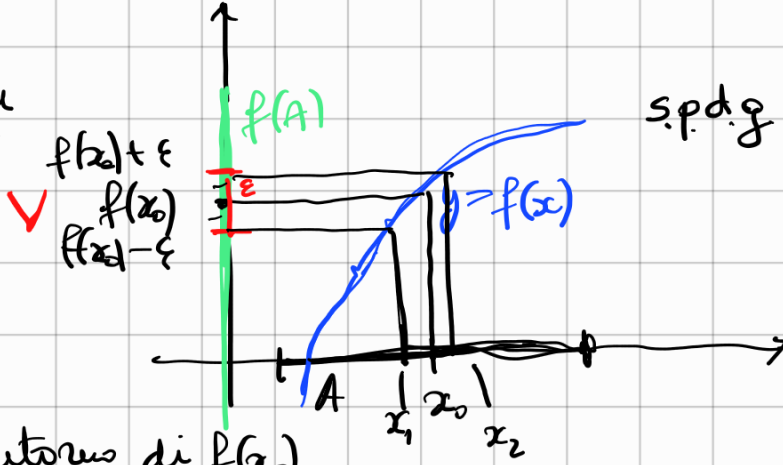
Teorema (continuità delle funzioni monotone)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona.

se $f(A)$ è un intervallo
 allora f è continua.



dim



s.p.d.g. supponiamo f crescente

$\forall V$ intorno di $f(x_0)$

$x_0 \in A$ arco x_1, x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$

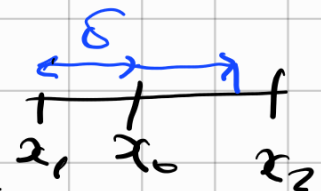
tali che $f(x_1) > f(x_0) - \epsilon$ $f(x_2) < f(x_0) + \epsilon$

allora per ogni $x \in (x_1, x_2)$ si ha $f(x) \in V$.

(x_1, x_2) contiene un intorno U di x_0

(se $x_0 \in \mathbb{R}$ $\delta = (x_2 - x_0) \wedge (x_0 - x_1)$)

(f monotona manda punti intermedi in punti intermedi)



CAVILLO : se $f(x_0)$ è massimo o minimo di $f(A)$ trova (e mi basta) un solo punto $x_1 < x_0$ oppure $x_2 > x_0$ $\square$

Corollario le funzioni elementari sono continue.

① $f(x) = mx + q$ se $m \neq 0$ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
se $m = 0$ $f(\mathbb{R}) = \{q\}$

② $f(x) = x^n$ se n dispari OK!

se n pari } mi restringo a $x \geq 0 \Rightarrow \underline{\text{OK!}}$
 $x \leq 0 \Rightarrow \underline{\text{OK!}}$

(Lemma di incollamento)

$f: A \rightarrow B$, $A = A_1 \cup A_2$ $x_0 \in A_1 \cap A_2$,
 $f|_{A_1}$ continua in x_0 e $f|_{A_2}$ è continua in x_0
 $\uparrow$ $\downarrow$
restrizione f è continua in x_0

③ $f(x) = a^x$ senso monotone $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

④ le funzioni inverse sono continue:

$\sqrt[n]{x}$

$\log_a x$

⑤ x^a stesso discorso.

ANZI! sono continue anche in $+\infty$ e $-\infty$
(se ha senso).

DUNQUE ABBIAMO ANCHE DIMOSTRATO CHE

$a^x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. $a > 1$

$$a^x \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \quad \text{se } a > 1$$

$$\log_a x \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{se } a > 1$$

$$\log_a x \rightarrow -\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{se } a > 1$$

$$x^\alpha \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{se } \alpha > 0$$

$$x^\alpha \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{se } \alpha < 0$$

$\vdots$

⑥ $\sin, \cos$ vanno fatte a pezzi
sono continue.

⑦ $f(x) = |x|$

Teorema *continuità della composizione*

$$f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C, \quad x_0 \in A, \quad y_0 = f(x_0) \in B$$

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0

Allora $g \circ f: A \rightarrow C$ è continua in x_0 .

$\leadsto$

dim

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$x \qquad y$

f continuous in x_0 : $\forall V \in \mathcal{U}_{y_0} \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} : f(U) \subseteq V$

g continuous in y_0 : $\forall W \in \mathcal{U}_{g(y_0)} \exists V \in \mathcal{U}_{y_0} : g(V) \subseteq W$

$g \circ f$ continuous in x_0 : $\forall W \in \mathcal{U}_{g(y_0)} \overset{\exists V}{\forall} \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} : g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$

$$g(y_0) = g(f(x_0))$$

□

Ex $f(x) = \log_2 \sqrt{\sin x}$ is continuous.