

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 16 - 27.10.2025

CONTINUITÀ

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f è continua in $x_0 \in A$:

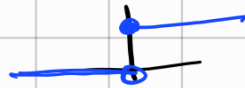
①

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Esempi: $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua

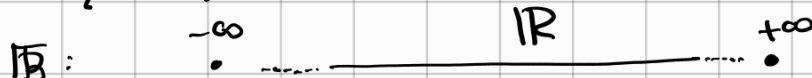


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Possono considerare funzioni: $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$



ci piacerebbe definire $\frac{1}{x}$ anche per $x = +\infty$ o $x = -\infty$

$$\frac{1}{+\infty} = 0 \quad \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$f: \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{con}$$

f è continua?

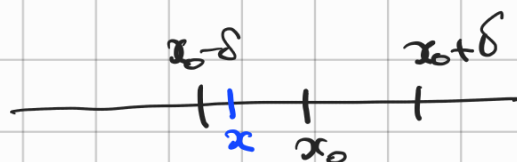
DEFINIZIONE "TOPOLOGICA" di CONTINUITÀ

idea

$$|x - x_0| < \delta$$



$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

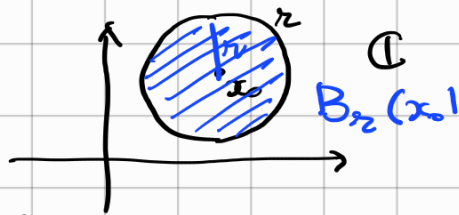


la continuità non è "quantitativa" ma "qualitativa".

se $x_0 = +\infty$ $|x - x_0| < \delta$ non ha senso!

INTORNO: $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = B_\delta(x_0)$
 ha senso $\delta > 0$
 non ha senso in $\mathbb{C}$

$$B_r(x_0) = \{x : |x - x_0| < r\}$$



continuità in x_0 :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \quad x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$$

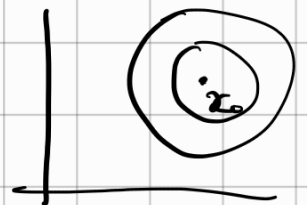
$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$$

Continuità (definizione topologica)

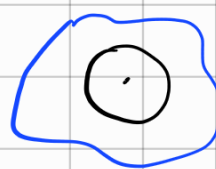
Dare una topologia significa dire chi sono gli intorni dei punti. La topologia di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) è data dagli intorni base:

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{B_r(x_0) : r > 0\}$$

↑
 ↑
 intorno circolare di x_0
 base di intorni.

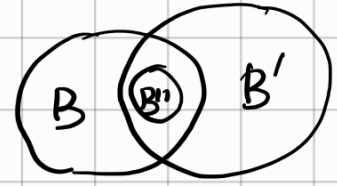


$$\left[\begin{array}{l} \text{In realtà qualunque } U \supseteq B \text{ con } B \in \mathcal{B}_{x_0} \\ \text{è un intorno.} \\ U_{x_0} = \{U : \exists B \in \mathcal{B}_{x_0} : U \supseteq B\} \end{array} \right]$$



def (topologica di continuità) $\forall V \in \mathcal{B}_{f(x_0)} \exists U \in \mathcal{B}_{x_0} : f(U) \subseteq V.$

Una famiglia $\mathcal{B}_x$ definita per ogni $x \in X$ si dice essere una base di intorni se valgono le seguenti:



(i) $x_0 \in B_{x_0}$

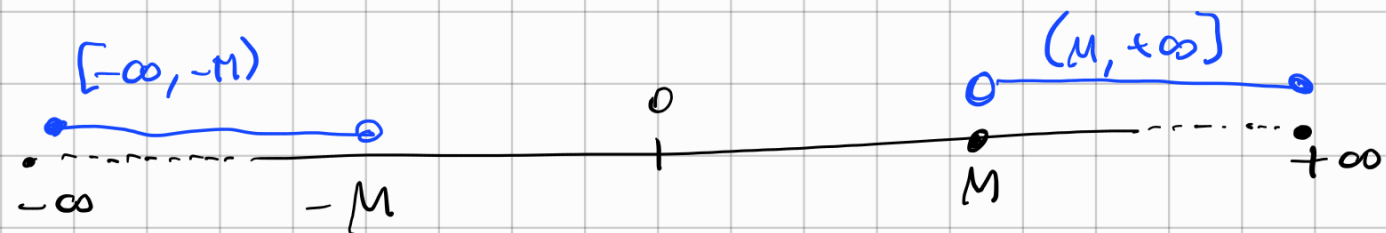
(ii) $B, B' \in \mathcal{B}_{x_0} \Rightarrow \text{esiste } B'' \in \mathcal{B}_{x_0} : B \cap B' \supseteq B''$

[(iii) ??]

Reali estesi $\overline{\mathbb{R}}$

Per definire la continuità (e i limiti) su $\overline{\mathbb{R}}$ basta definire gli intorni di tutti i punti $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ cioè

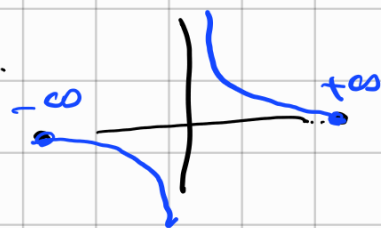
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} & \mathcal{B}_{x_0} \text{ è lo stesso che ora su } \mathbb{R} \\ x_0 = +\infty & \mathcal{B}_{+\infty} = \{ (M, +\infty] : M \in \mathbb{R} \} \\ x_0 = -\infty & \mathcal{B}_{-\infty} = \{ [-\infty, -M) : M \in \mathbb{R} \} \end{cases}$$



Es $f: \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{e}$ continua.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0 \right)$$



f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ perché la continuità è locale:

Teo Se f coincide con g in un intorno di x_0
 f è continuo in $x_0 \Leftrightarrow g$ è continuo in x_0

Basta verificare che f è continua anche in $+\infty$ e in $-\infty$.

Continuità in $+\infty$: $x_0 = +\infty$ $f(x_0) = 0$

$$\forall V \in \mathcal{D}_0 \quad \exists U \in \mathcal{D}_{+\infty} : f(U) \subseteq V$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \in (M, +\infty] \Rightarrow f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

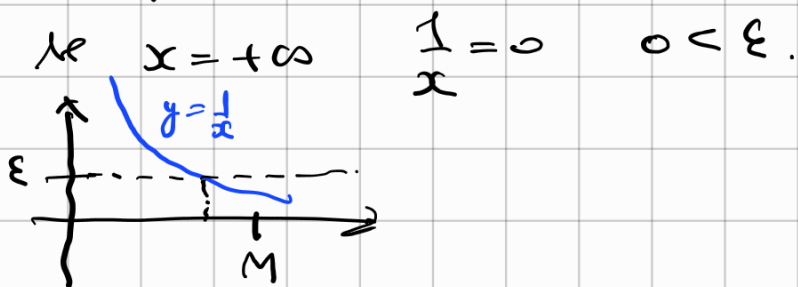
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x > M \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

(continuità in $x_0 = +\infty$ per una funzione che assume valore finito)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = +\infty, \quad f(x_0) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x > M \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon.$$

Rimane $x \in \mathbb{R}$.



Dato $\varepsilon > 0$ scelgo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

$$\text{e } x > M \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \square$$

Per $x_0 = -\infty$ la continuità diventa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x < -M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M : x < -M \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Dato $\varepsilon > 0$ prendo $M = \frac{1}{\varepsilon}$



$$x < -M < 0 \Rightarrow |x| > M \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{M} = \varepsilon \quad \square$$

Possiamo rendere continua $\frac{1}{x}$ anche in 0?

NO! Se usiamo $\mathbb{R}$ con due punti all'infinito.

Infatti $f : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = +\infty \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Questa f è continua!

(MA) $g : [-\infty, 0] \rightarrow [-\infty, 0]$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = -\infty \\ -\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

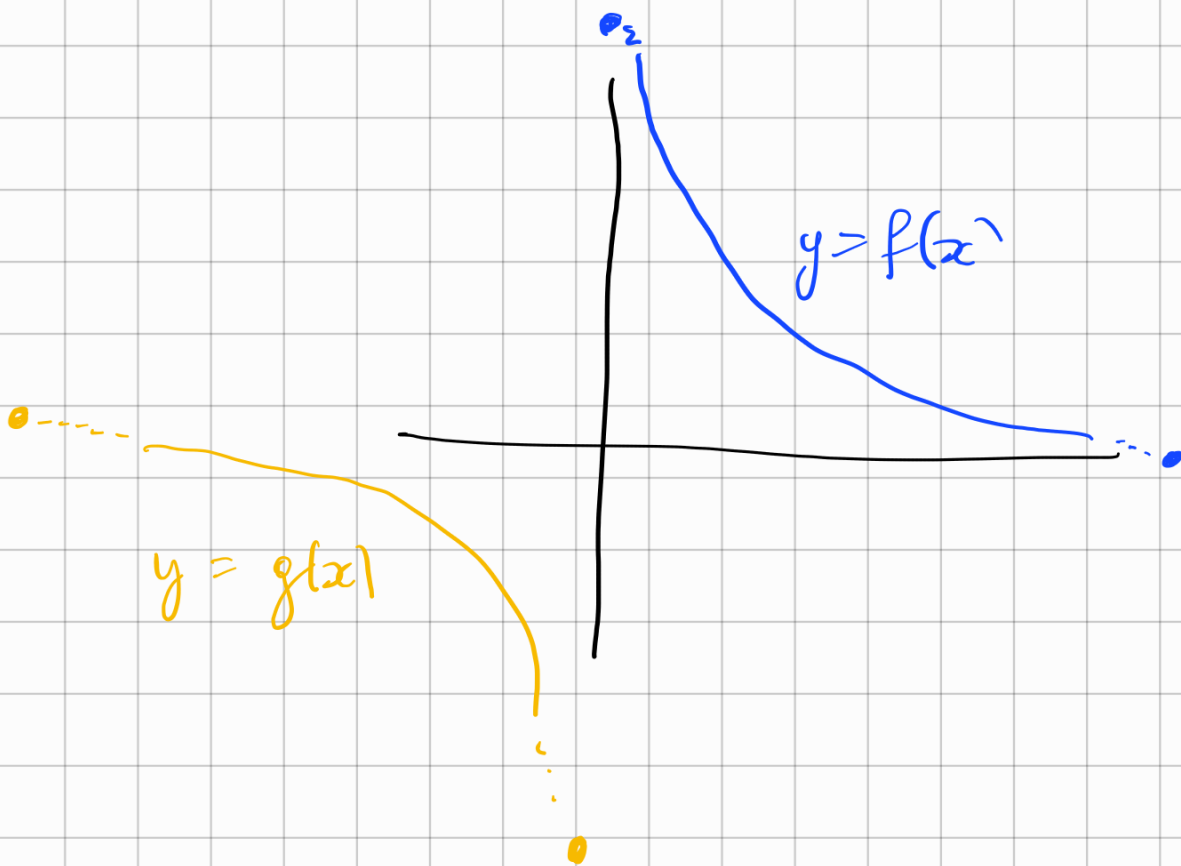
anche questa è continua.

ALLORA

$$h(x) = \frac{1}{x} \quad h: \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

non può essere estesa con continuità

anche a $x=0$.

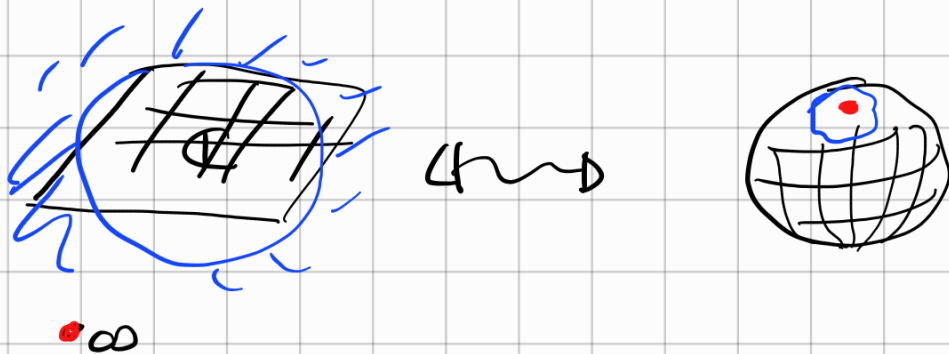


Come faccio a rendere $\frac{1}{x}$ continuo anche in 0?

Due possibilità.

① Metto un solo punto all'infinito

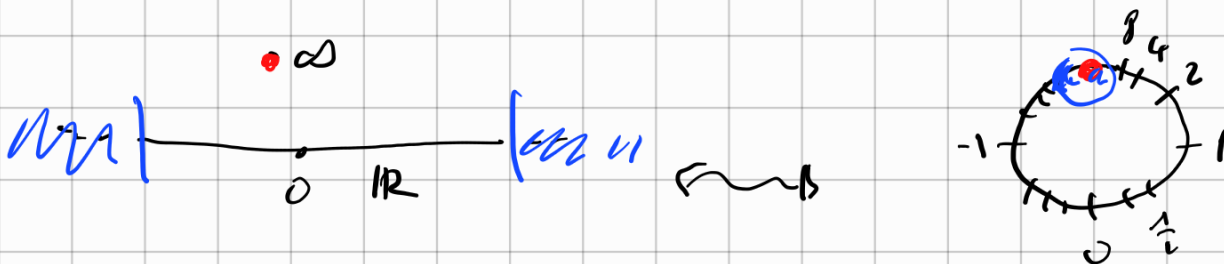
così su $\mathbb{C}$: $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



$$f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{se } z = 0 \\ 0 & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

f può essere ristretta $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subseteq \bar{\mathbb{C}}$



$$f: \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

Gli intorni di ∞ sono:

$$B_\infty = \{ \{x : |x| > M\} : M \in \mathbb{R} \}$$

f con questa "topologia" è continua.

2. (recorda possibilitati)



$$\hat{\mathbb{R}} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty, -\infty, 0^+, 0^-\}$$

$$f: \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\mathbb{R}} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ +\infty & \text{se } x = 0^+ \\ -\infty & \text{se } x = 0^- \\ 0^+ & \text{se } x = +\infty \\ 0^- & \text{se } x = -\infty \end{cases}$$

Chi sono gli intorno di 0^+ e 0^- ?

$$B_{0^+} = \{ [0^+, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \}$$

$$B_{0^-} = \{ (-\varepsilon, 0^-] : \varepsilon > 0 \}$$

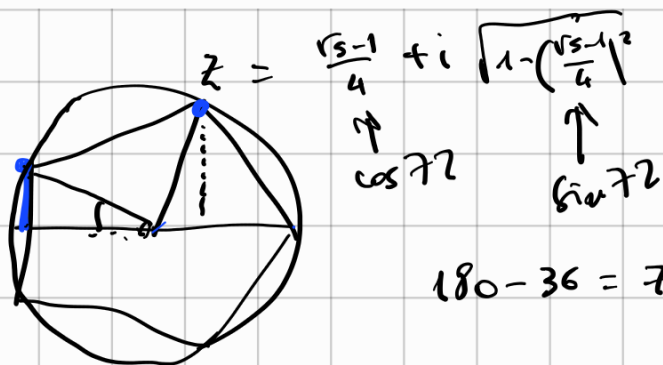
f risulta continua con questa topologia.

LIMITI (massime esterne)

$$f(x) \rightarrow l \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

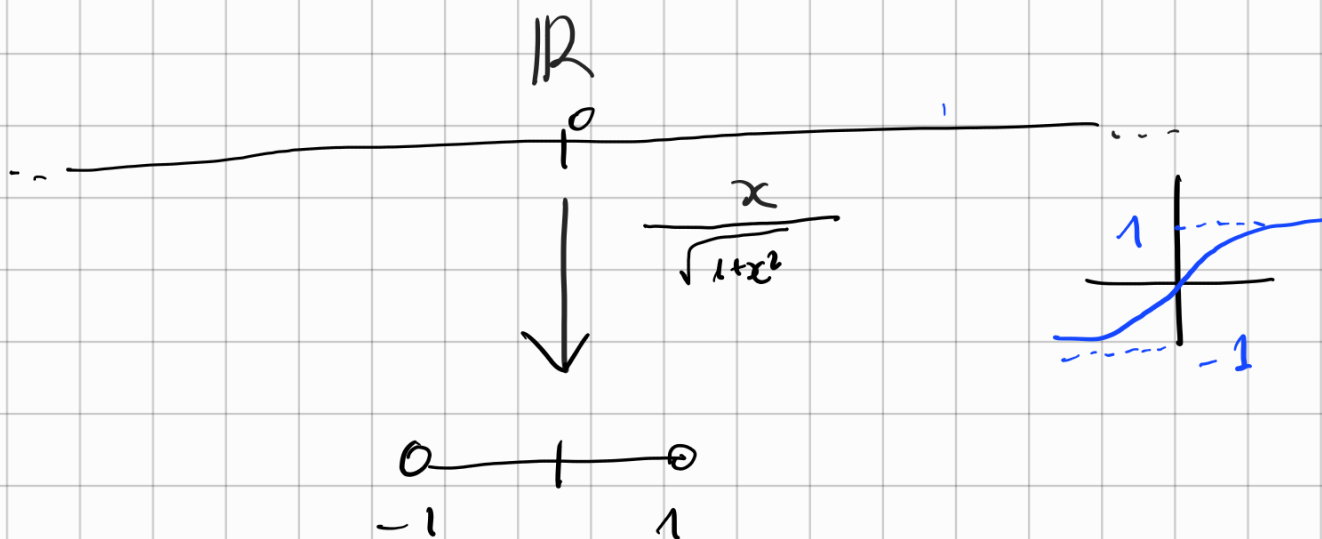
$$\text{se posto } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in x_0 .



$$180 - 36 = 72 \cdot 2$$

$$\begin{cases} \cos 36 = -\sin 72 \\ \sin 36 = \cos 72 \end{cases}$$



omorphism

A

$\sim$



X

$\sim$



Y

$\sim$

Y

12

$\sim$

(0,1)