

ANALISI MATEMATICA B

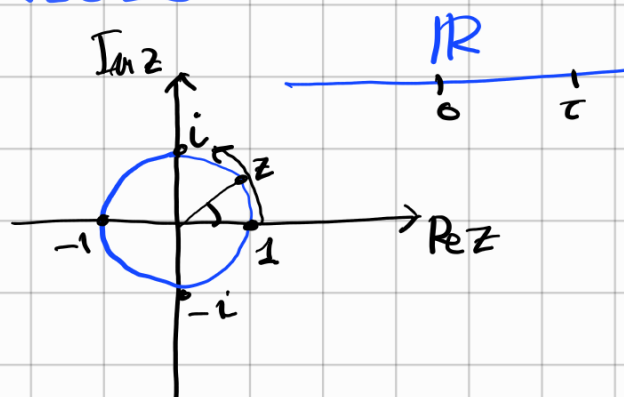
LEZIONE 15 - 24.10.2025

Funzioni trigonometriche

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow U = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$$

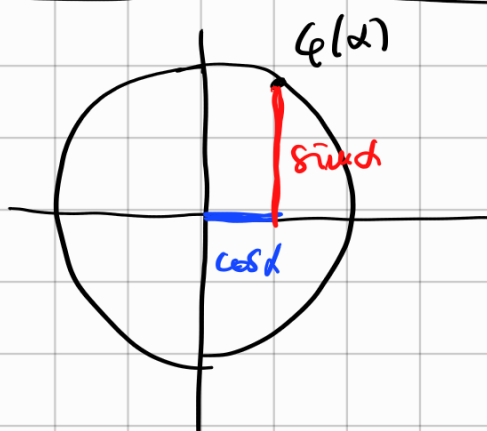
τ la misura dell'angolo giro

$\tau > 0$ è il minimo



φ : misura $\rightarrow$ angolo

- $\varphi(\tau) = 1$ ($\varphi(n\tau) = 1$)
- $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$ $\nleftrightarrow$
- $\text{Im } \varphi$ è crescente su $[0, \frac{\tau}{4}]$.



$$\begin{cases} \cos \alpha = \text{Re } \varphi(\alpha) \\ \sin \alpha = \text{Im } \varphi(\alpha) \end{cases}$$

$$\varphi(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\varphi(\alpha + \beta) = \underline{\cos(\alpha + \beta)} + i \underline{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$= \underline{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} + i \underline{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$|\varphi(\alpha)|^2 = 1 \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$|z|=1 \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = z$$

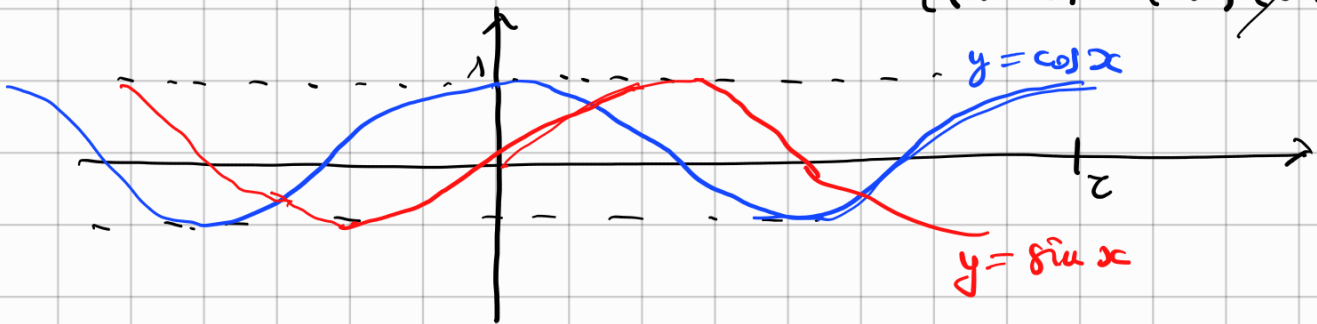
$$\varphi(-\alpha) = \frac{1}{\varphi(\alpha)} = \overline{\varphi(\alpha)} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$$

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1 + i0$$

$$|\varphi|=1 \quad |\cos| \leq 1 \quad |\sin| \leq 1$$

$$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha)$$



$$\tau = 360$$

Angoli notevoli

	0	180	90	60	30	45
$\varphi(\alpha)$	1	-1	i	$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$	$(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\alpha = 180 \quad \varphi(2\alpha) = \varphi(\tau) = 1$$

$$\varphi(\alpha)^2$$

$$z^2 = 1$$

$$z = \pm 1 \quad \leftarrow \text{sono soluzioni e sono tutte}$$

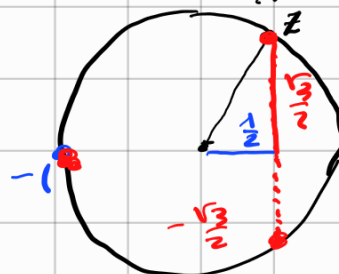
$$\alpha = 90 \quad z^2 = -1 \quad z = \pm i$$

$$(\text{per monotonia } z = i \text{ è la}$$

$$\alpha = 60 = \frac{180}{3} \quad z^3 = -1$$

$$z^3 + 1 = 0$$

$$(-1)^3 + 1 = 0$$



più che da scegliere)

Morale

le soluzioni di $z^n = c$ si distribuiscono nei vertici

LO VEDREMO! di un n-gono regolare

Dividere tre polinomi:

Dati $P(z)$, $S(z)$ polinomi esiste $Q(z)$, $R(z)$ polinomi

$$P(z) = S(z) \cdot Q(z) + R(z)$$

$$\text{e } \deg R(z) < \deg S(z).$$

$\uparrow$
grado

Ruffini Se $P(z_0) = 0$ allora scelp $S(z) = z - z_0$

$$P(z) = (z - z_0) Q(z) + R(z)$$

ma per $z = z_0$ $0 = 0 \cdot Q(z_0) + R(z_0)$

$$R(z_0) = 0$$

$$\deg R < 1$$

$$R \text{ è costante, } R = 0.$$

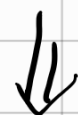
dunque: $P(z) = (z - z_0) Q(z).$

$$z^3 + 1 = 0 \quad z_0 = -1 \text{ è soluzione}$$

$$z^3 = -1$$

$$|z|^3 = 1$$

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$$



$$z^2 - z + 1 = 0$$

$$z - 1 + \frac{1}{z} = 0$$

$$|z| = 1$$

$$\frac{1}{z} = \bar{z}$$

$$z + \bar{z} = 1$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \pm \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

per geometria

$$\varphi(60^\circ) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

30° ?

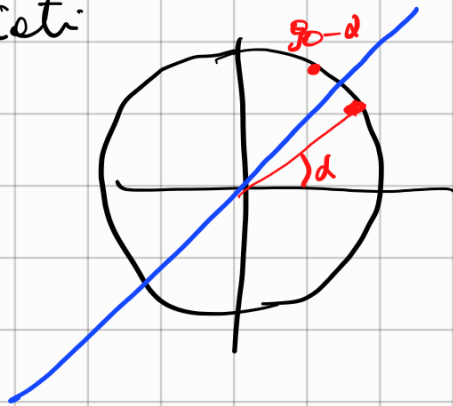
$$90 = 60 + 30$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = i \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \overline{\varphi(\alpha)}$$
$$= i \cdot \overline{\varphi(\alpha)}$$

$$\cos(90 - \alpha) + i \sin(90 - \alpha) = i (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$= \sin \alpha + i \cos \alpha$$

Seno/coseno di angoli complementari sono scambiati



simmetrici rispetto
alla bisettrice.

45° è complementare di se stesso: $\cos 45 = \sin 45$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$\cos^2 = \sin^2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

↑
segno positivo
per stare nel
I quadrante

Quanto vale $\cos/\sin$ di 72° ?
lo scoprirete nel test settimanale!



(CAPITOLO 2!)

CONTINUITA'

di tutto quello che abbiamo visto fino ad ora dovrà
sapere:

- proprietà dei numeri reali (campo ordinato)
- proprietà delle funzioni elementari
- sup / inf
- numeri complessi (per la vita del fisico)

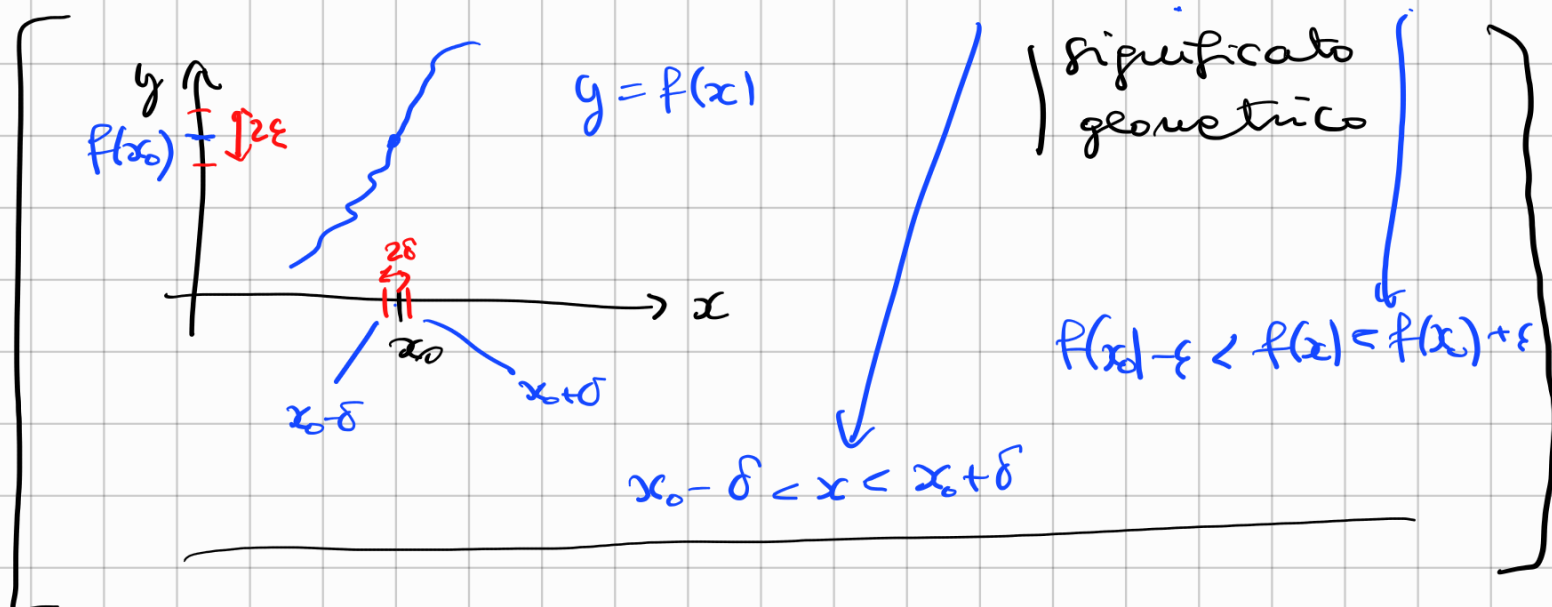
Il nostro ambito di studio sono le funzioni
reali: $A \subseteq \mathbb{R}$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

(sarà utile estendere tutto anche a funzioni
complesse)

def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice essere
continua nel punto $x_0 \in A$ se:

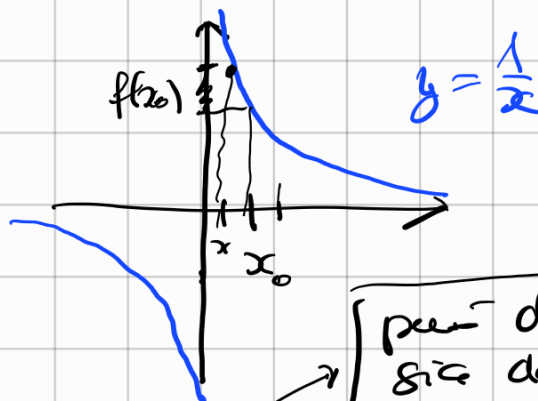
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



diremo che la funzione è continua se
 f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.

Es $f(x) = \frac{1}{x}$ é continua. $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$



Dato $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \neq 0$

Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$ tale che per difendere
sia da x_0 che da ε
ma non
da x

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| \stackrel{?}{<} \varepsilon$$

$$\left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{\delta}{|x| \cdot |x_0|} < \varepsilon$$

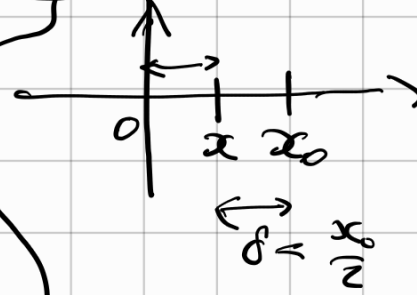
$$\delta < \varepsilon |x| \cdot |x_0|$$

$$\delta \leq \varepsilon \frac{|x_0|}{2} |x_0|$$

Ipotesi

$$\delta < \frac{|x_0|}{2}$$

$$|x| > \frac{|x_0|}{2}$$



$$|x - x_0| < \delta$$

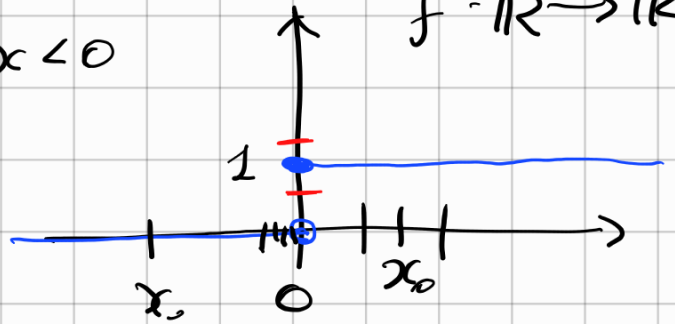
Basta scegliere δ tale che
$$\begin{cases} \delta > 0 \\ \delta \leq \varepsilon \frac{|x_0|^2}{2} \\ \delta < \frac{|x_0|}{2} \end{cases}$$

Ad esempio $\delta = \frac{|x_0|}{4} \wedge \varepsilon \frac{|x_0|^2}{2}$

□

Es $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

non è continua in $x_0 = 0$



Se $\varepsilon = \frac{1}{2}$ per ogni $x < 0$ si ha $|f(x) - f(0)| = 1 > \varepsilon$

$\forall \delta > 0 \exists x < 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{es: } x = -\frac{\delta}{2}$

$|x - x_0| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$

f non è continua in 0.

⏏ Basterà mostrare che f è continua in tutti gli altri punti: $x_0 \neq 0$.