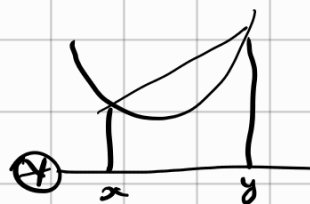


ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 18 - 6.11.2025

funzioni convesse

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, A convesso



$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se
(strettamente)

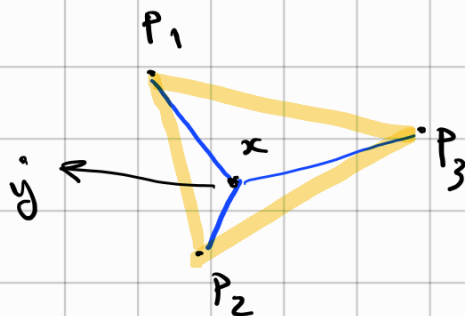
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$\forall x, y \in A$
 $\forall \lambda \in [0, 1]$ ($\lambda \in (0, 1)$)

Esercizio (punti di Fermat - Torricelli?)

$p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = |x - p_1| + |x - p_2| + |x - p_3|$$



Nota $x \mapsto |x|$ è convessa ma non strettamente convessa.
infatti

$$|\lambda x| = \lambda |x| \quad \text{se } \lambda > 0$$

$\hookrightarrow$ vale l'uguaglianza in (*) se $y = \lambda x$.

ma se p_1, p_2, p_3 non sono allineati dati

$x, y \in \mathbb{R}^n$ la retta passante per x e y non contiene
almeno un punto p_k , $k=1,2,3$ e quindi
la disuguaglianza (*) è stretta per $|x - p_k|$

$\Rightarrow f$ è strettamente convessa.

Oss Se f convessa, x_1, x_2 punti di minimo
per f allora

$$\lambda \mapsto f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \text{ è costante}$$



(in particolare se $v = x_2 - x_1$
 si ha $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ nel segmento)

Dunque f non è strettamente convessa
 se $x_2 \neq x_1$

Ovvero se f è strettamente convessa c'è al massimo
un punto di minimo.

Nell'esercizio $f(x) = \sum_{i=1}^3 |x - p_i|$ ha esattamente
 un punto di minimo : $\begin{cases} \text{almeno uno} \Leftarrow \text{coerciva} \\ \text{al più uno} \Leftarrow \text{stretta} \end{cases}$
 convessa

Sia $\bar{x}$ il punto di minimo per f .

Allora se f è differenziabile in $\bar{x}$ $\nabla f(\bar{x}) = 0$

$x \mapsto |x|$ è differenziabile se $x \neq 0$ $\nabla |x| = \frac{x}{|x|}$

f è diff. bile in x se $x \notin \{p_1, p_2, p_3\}$.

$$\nabla f(x) = \nabla \sum_{i=1}^3 |x - p_i| = \sum_{i=1}^3 \frac{x - p_i}{|x - p_i|}$$

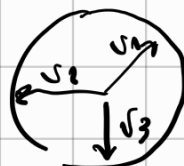
$$0 = \nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{x} - p_i}{|\bar{x} - p_i|} = \sum_{i=1}^3 \hat{v}_i$$

versore : $\hat{v} = \frac{v}{|v|}$

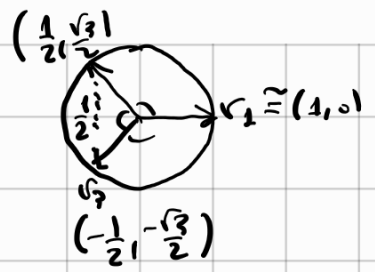
$$\hat{v}_i = \frac{x - p_i}{|x - p_i|}$$

$$\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3 = 0$$

Lo sono complanari.

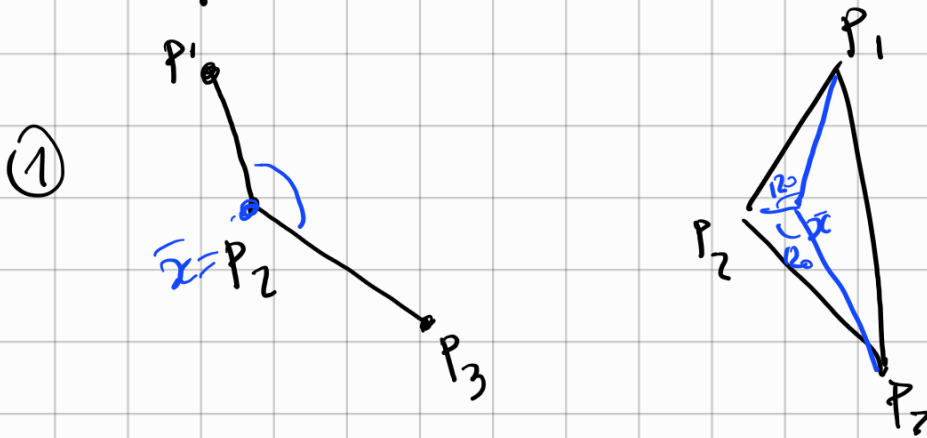


v_1, v_2, v_3 identificano ^{tra loro} i vettori di 120°



Dato un triangolo P_1, P_2, P_3 il punto di Fermat (cioè il minimo di f)

- ① $\circ$ è uno dei 3 punti
- ② $\circ$ è l'unico punto che vede P_1, P_2, P_3 con angoli uguali di 120° .



Teo (la proiezione su un convesso è non espansiva)

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso chiuso $P_C: \mathbb{R}^n \rightarrow C$
 $x \mapsto P_C(x)$

dove

$P_C(x) \in C$ ha minima distanza da x

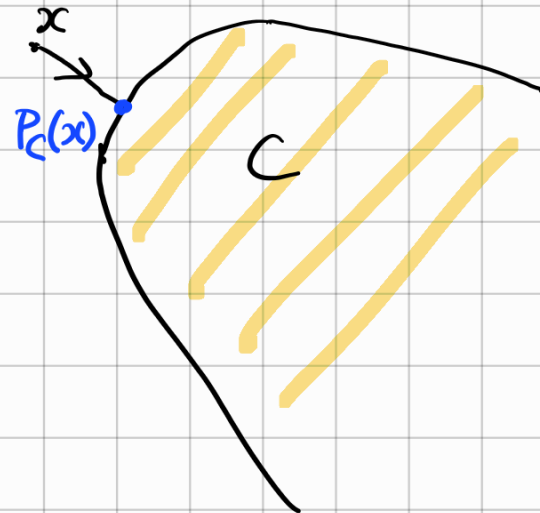
① P_C è ben definita.

② P_C è 1-lipschitziana

Def f è L -lipschitziana se

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

Oss Lipschitz $\Rightarrow$ continua.



Esempio $f(x) = \sum_{i=1}^3 |x - p_i|$

$$C = \text{conv} \{ p_1, p_2, p_3 \} = \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i : \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

$$f(p_c(x)) \leq f(x) \text{ in quanto } |p_c(x) - p_i| = |p_c(x) - p_c(p_i)| \leq |x - p_i|$$

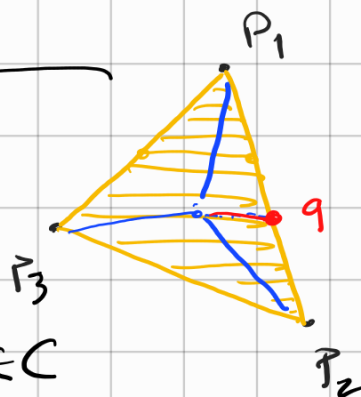
$$\Rightarrow \bar{x} \in C$$

Lemma Se C convesso,

$$p_1, \dots, p_N \in C, \lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0,$$

$$\sum \lambda_i = 1 \text{ allora } \sum_{i=1}^N \lambda_i p_i \in C$$

(Per $N=2$ è la definizione)



dim (lemma) $N=2$ è la definizione.

Usiamo l'induzione! Supponiamo il risultato vero per un certo N . Consideriamo $N+1$ punti:

$$p_1, \dots, p_{N+1} \in C, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1} \geq 0, \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \sum_{i=3}^{N+1} \lambda_i p_i =$$

$$\begin{aligned} & \text{"} q \\ & \mu = \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

$$q = \frac{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$q \in C.$$

$$\mu + \lambda_3 + \dots + \lambda_{N+1} = 1$$

$$\mu q + \sum_{i=3}^{N+1} \lambda_i p_i \in C \text{ per ipotesi induttiva } \square$$

Allo stesso modo si dimostra che:

Teorema Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa allora $\left\{ \begin{array}{l} x_1, \dots, x_N \in C \\ \lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$

$$f\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(x_i)$$

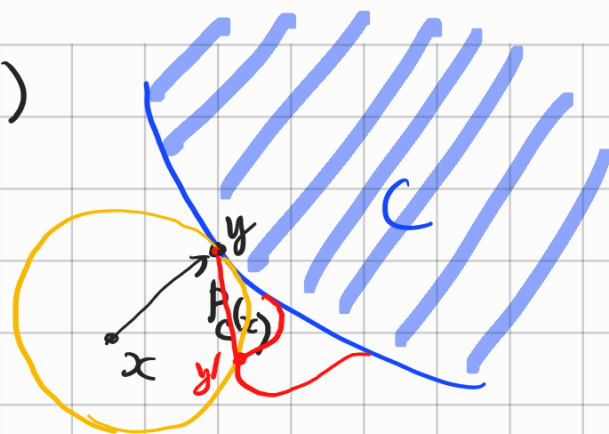


dim (Teo: P_C è 1-lipschitz)

(1) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$

Se A è chiuso $\inf = \min$.

$a \mapsto |x - a|$ è continua e coerciva
(Weierstrass generalizzato).



Se C è chiuso e convesso il minimo è unico:

$r = d(x, C)$

$B_r(x) \cap C = \emptyset$

se fosse y' un altro minimo oltre ad y

$[y, y'] \subseteq C$ ma $(y, y') \subseteq B_r(x)$ assurdo $\square$

$P_C(x)$ è ben definito se C è convesso chiuso.

(2) $P_C(x)$ è 1-lipschitz $|P_C(x) - P_C(y)| \leq |x - y|$

CLAIM: $\langle q - p, x - p \rangle \leq 0$

$q_t = (1-t)p + tq$

$q_0 = p$

$t \in [0, 1]$

$p = P_C(x)$

$q_t \in C$

$f(t) = |q_t - x|^2$ ha minimo per $t=0$.

$\Rightarrow f'(0) \geq 0$ (Fermat)

$f'(t) = 2 \langle q_t - x, q - p \rangle$

$f'(0) = 2 \langle p - x, q - p \rangle \geq 0$

$\square$ (CLAIM)

Conclusione:

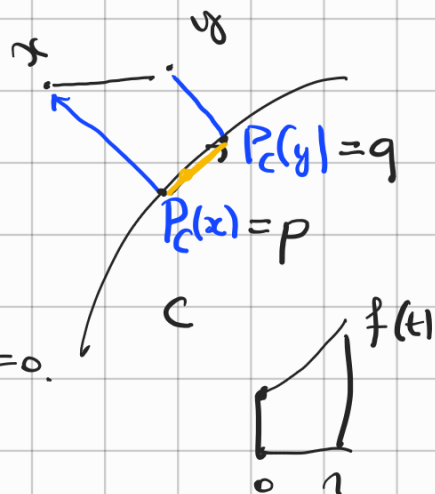
$\left\{ \begin{array}{l} \langle q - p, x - p \rangle \leq 0 \\ \langle p - q, y - q \rangle \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle q - p, x - p - y + q \rangle \leq 0$

simmetricamente

$x \leftrightarrow y$

$p \leftrightarrow q$

$\Downarrow$
 $\langle q - p, q - p \rangle + \langle q - p, x - y \rangle \leq 0$

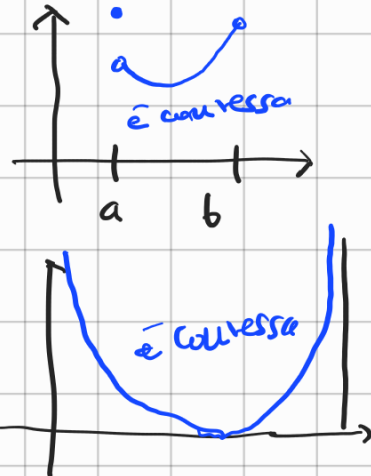


$$|q-p|^2 \leq \langle q-p, y-x \rangle \leq |q-p| \cdot |y-x|$$

$$|q-p| \leq |y-x| \quad \square$$

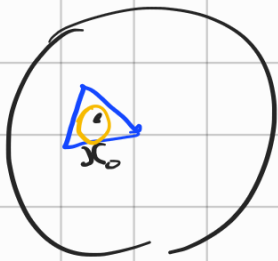
Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora f è localmente lipschitziana (in particolare f è continua).



dim

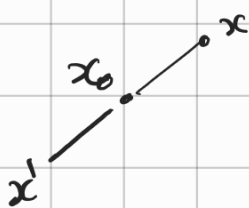
Pono 1 f è localmente superiormente limitata.



$\Omega \ni p_1 \dots p_{m+1} \text{ t.c. } C = \text{conv}\{p_1 \dots p_{m+1}\}$
è un intorno di x_0 .

$$x = \sum \lambda_i p_i \Rightarrow f(x) \leq \sum \lambda_i f(p_i) \leq \sum f(p_i) =: M \quad \square$$

Pono 2 f è localmente inferiormente limitata.



$$\frac{x+x'}{2} = x_0 \quad x' = 2x_0 - x$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x')$$

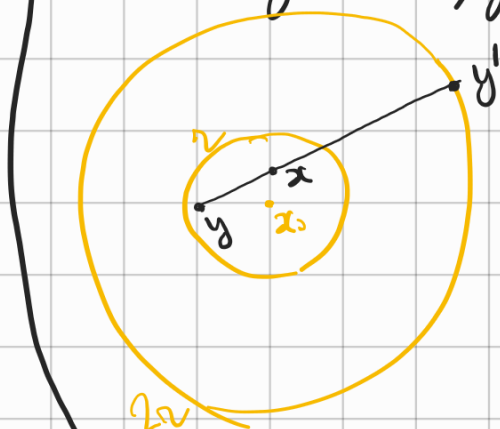
$$f(x) \geq 2f(x_0) - f(x') \geq 2f(x_0) - M \quad \square$$

⚡ FINE LEZIONE ma
VEDI CONCLUSIONE ↓

Conclusione Dato $x_0 \in \Omega$ prendiamo $r > 0$ tale che f sia limitata su $\overline{B_{2r}(x_0)}$: $m \leq f(x) \leq M$.

Dati $x, y \in B_r(x_0)$ esiste $y' \in \partial B_{2r}(x_0)$ allineato con x e y dalle parti opposte di y , cioè:

$$x = ty + (1-t)y' \quad \text{con } t \in [0, 1], \quad |y' - x_0| = 2r$$



Allora:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\leq tf(y) + (1-t)f(y') - f(y) \\ &= (1-t)(f(y') - f(y)) \leq (1-t)(M - m) \end{aligned}$$

Ora voglio stimare $(1-t)$ sapendo che $|x - y| \leq 2r$ mentre $|y' - y| \geq r$:

$$|x - y| = |(1-t)(y' - y)| = (1-t) \cdot |y' - y| \geq (1-t)r$$

$$\text{da cui} \quad 1-t \leq \frac{|x - y|}{r}$$

$$\text{Dunque:} \quad f(x) - f(y) \leq |x - y| \frac{M - m}{r} = L |x - y|$$

$$L := \frac{M - m}{r}$$

Scambiando x e y :

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

□