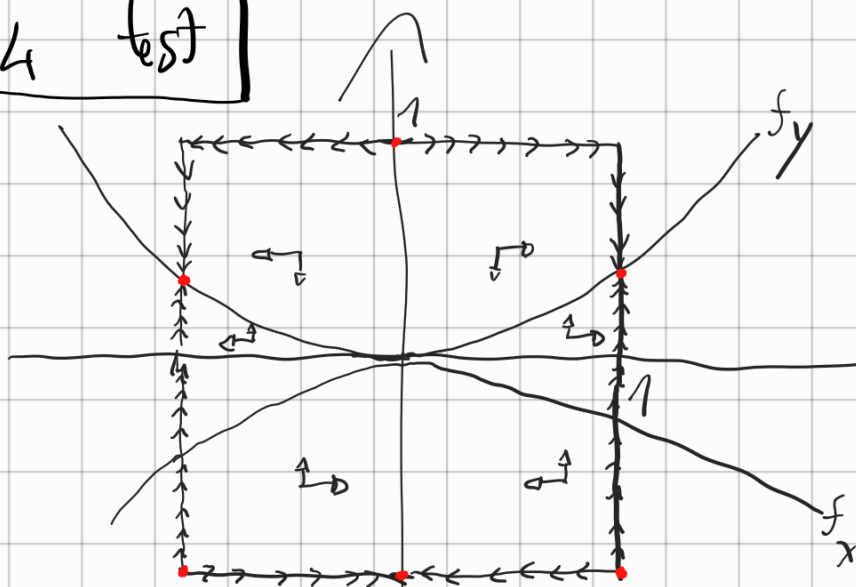


ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 15 - 30.10.2025

ES 4 test



$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0$$

$$\Downarrow 3x^2 - 4y > 0$$

$$\Downarrow y < \frac{3}{4}x^2$$

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y - 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} > 0$$



$$4x^3 + 6yx > 0$$

$$x(4x^2 + 6y) > 0 \begin{cases} x > 0 \\ 4x^2 + 6y > 0 \\ \Downarrow y > -\frac{2}{3}x^2 \end{cases}$$

$$f(0,1) = -2 \quad ; \quad f(-1,-1) = -4 \quad ; \quad f(0,-1) = -2 \quad ; \quad f(1,-1) = -4$$

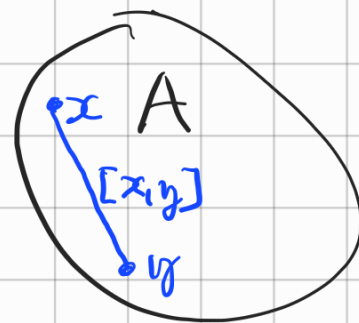
$$y = \frac{3}{4}$$

$$f\left(1, \frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{17}{8}$$



CONVESSITA'

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso

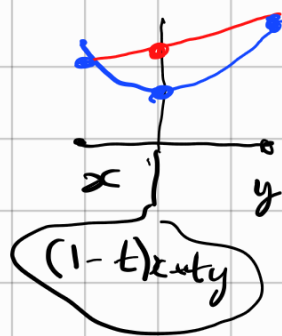


se $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subseteq A$

$$[x, y] = \left\{ (1-t)x + ty : t \in [0, 1] \right\}$$

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diremo che f è convessa se $\forall x, y \in A$

$$t \mapsto f((1-t)x + ty)$$



è convessa cioè

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

È strettamente convessa se vale $<$ quando

$$t \in (0, 1)$$

Oss. f è convessa in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se tutte le restrizioni alle rette (intersecati A) sono convesse.

Osservazione f è convessa $\Leftrightarrow E_f$ è convesso

$$E_f = \{ (x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq f(x) \} = \text{epigrafo}$$

dim identica ad ANALISI 1.



Es $f(x) = |x|$ diseg. di convessità $t \in [0, 1]$

$$|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y| = (1-t)|x| + t|y| \quad \text{OK}$$

$|x|$ è convessa

**
elevo al quadrato
uso C-S*

CRITERI DI CONVESSITA'

I ordine

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \quad \text{①}$$

Fissiamo $x_0 \in A$, $v \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$



$$g(t) = f(x_0 + tv)$$

$$g'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$g(0) = f(x_0)$$

$$\text{per } x = x_0 + tv$$

ANALISI 1

$$g(t) \geq g(0) + g'(0) \cdot t$$

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), v \rangle \cdot t$$

$$= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

- Se f è differenziabile in x_0 allora vale ①
- Viceversa se la formula vale in ogni x_0 allora $\forall x_0, v$ si trova che g è convessa quindi f è convessa.

ES le funzioni lineari sono concesse (ma non strettamente) e sono concave,

[f è concava se $-f$ è convessa (ovvero vale la disuguaglianza opposta).]

Corollario Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa e

f differenziabile in x_0 e $\nabla f(x_0) = 0$

allora $f(x) \geq f(x_0) + \cancel{\nabla f(x_0)(x-x_0)} = f(x_0)$

cioè x_0 è minimo globale per f .
(punto di) [Nota $(e^x)' > 0$]

Viceversa se f ha minimo in x_0 ed è
derivabile in x_0 allora $\nabla f(x_0) = 0$

(basta restringere f alle rette $x_0 + te_k$) $\perp_{x_0}$

CRITERI del II ORDINE

f convessa, differenziabile due volte in x_0

allora $D^2 f(x_0) \geq 0$ (semitdefinita positiva)
 $\uparrow$
matrice Hessiana

x_0, v, t come sopra

$$g(t) = f(x_0 + tv)$$

$$g(0) = f(x_0)$$

$$g'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle, \quad g'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$g''(0) = \langle D^2 f(x_0) v, v \rangle \geq 0 \quad (g \text{ è convessa})$$

$$\forall v \Rightarrow D^2 f(x_0) \geq 0$$

Viceversa se $D^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I, A \text{ aperto (convesso)}$
 come sopra scopro che g è convessa $\forall x_0 \forall v$.
 quindi f è convessa. (strettamente)

Es $f(x) = \langle Ax, x \rangle \quad \begin{matrix} A \text{ simmetrica} \\ \forall \end{matrix} \begin{matrix} \text{è convessa} \Leftrightarrow A \geq 0 \\ \text{è strettamente convessa} \Leftrightarrow A > 0 \end{matrix}$

$$D^2 f = 2A$$

Calcoliamo la derivata seconda!

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \left[\frac{d}{dt} f(x_0 + tv) \right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} \langle A(x_0 + tv), x_0 + tv \rangle \right]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle Ax_0 + tAv, x_0 + tv \rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\langle Ax_0, x_0 \rangle + t \langle Av, x_0 \rangle + t \langle Ax_0, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle \right)$$

$$= \langle Av, x_0 \rangle + \langle Ax_0, v \rangle + 2t \cancel{\langle Av, v \rangle} =$$

$$= \langle Ax_0 + A^t x_0, v \rangle = 2 \langle Ax_0, v \rangle \quad \begin{matrix} \swarrow \\ A \text{ simmetrica} \end{matrix}$$

$$\nabla f = 2Ax_0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \frac{\partial f}{\partial v} (x_0 + tw) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} 2 \langle A(x_0 + tw), v \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (2 \langle Ax_0, v \rangle + 2t \langle Aw, v \rangle) = 2 \langle Aw, v \rangle \end{aligned}$$

$$\langle D^2 f(x_0) v, w \rangle = 2 \langle Av, w \rangle \Rightarrow D^2 f(x_0) = 2A.$$

ES $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^2$ è convessa?

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 + 2y \\ f_y = 2x + 2y \end{cases} \quad \begin{cases} f_{xx} = 12x^2 \\ f_{xy} = 2 \\ f_{yx} = 2 \\ f_{yy} = 2 \end{cases} \quad (\text{verif-ca})$$

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det D^2 f(x, y) = 24x^2 - 4 = 4(6x^2 - 1)$$

$$\geq 0 \quad \text{se} \quad 6x^2 > 1 \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\text{se } |x| < \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \det D^2 f(x, y) < 0$$

$$\Rightarrow D^2 f \text{ non è semidefinita!}$$

$$D^2 f \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 0 \mu \end{pmatrix} \quad \lambda_0 < 0 \quad \vee \quad \lambda < 0 \quad \vee \quad \mu < 0.$$

f non è convessa (su tutto $\mathbb{R}^2$)

Nel semipiano $\{x \geq \frac{1}{\sqrt{6}}\}$ e $\{x \leq -\frac{1}{\sqrt{6}}\}$

f è convessa perché $\det D^2 f(x) \geq 0$

$$\lambda, \mu \geq 0 \leftarrow \begin{cases} \det D^2 f(x) \geq 0 \\ \text{tr } D^2 f(x) = 12x^2 + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$D^2 f(x, y) \geq 0.$$

□ Trovare ^{comunque} eventuali massimi e minimi di f

Teorema (Weierstrass generalizzato)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua $A \neq \emptyset$ chiuso e
illimitato e
(f coerciva) $f(x) \rightarrow \infty$ per $|x| \rightarrow \infty$

Allora f ha minimo.

dim $m = \inf f(A)$ esiste $x_k \in A$ $f(x_k) \rightarrow m$

Se $\limsup_k |x_k| = +\infty$ $\exists (x_{k_j}) \rightarrow +\infty$
e quindi $m = \lim f(x_{k_j}) = +\infty$
ASSURDO

x_k limitata

$$\exists x_{k_j} \rightarrow x \quad f(x) = \lim_j f(x_{k_j}) = m = \inf f(A).$$

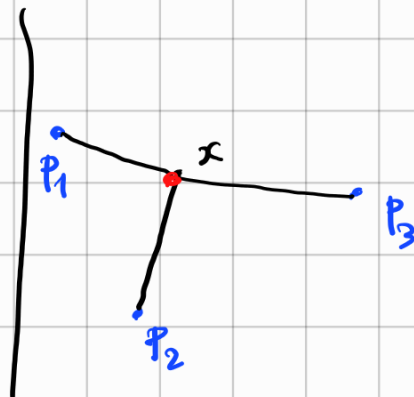
x è punto di minimo $\square$

(METODO DIRETTO
DEL CALCOLO DELLE
VARIAZIONI)

⏏ Si applica all'esercizio precedente.

Es (Fermat) dati $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^n$
minimizzare

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 |x - p_i|$$



$|x|$ è convessa

$\Rightarrow |x - p_i|$ è convessa

$\Rightarrow f(x)$ è convessa

(Verifica $g \circ L$ è convessa
se g convessa, L lineare
affine)

(Verifica f, g convesse
 $\Rightarrow f+g$ è convessa)

$|x|$ non è strettamente convessa ma

⏏ f è strettamente convessa (se p_1, p_2, p_3
non sono allineati).