

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 12 - 23.10.2025

Domanda 7

Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e si osservi che la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.
In $(0, 0)$

- ☒ la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}$ non è continua e non è derivabile (parzialmente)
- ☒ la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua ma non derivabile (parzialmente)
- ☐ la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}$ è derivabile (parzialmente) ma non continua
- ☐ esiste la derivata parziale $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$.

test
alternativo

$$f = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \log(x^2 + y^2) + xy \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$= y \log(x^2 + y^2) + 2 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \left[\frac{d}{dx} f(x, 0) \right]_{x=0} = \frac{d}{dx} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \log(x^2 + y^2) + 2 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad |x| \leq \rho \quad |y| \leq \rho$
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \rho \log \rho^2 + 2 \frac{\rho^3}{\rho^2}$
 $\downarrow$
 0

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ è continua.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$$

$$= \frac{d}{dy} \begin{cases} y \log(y^2) + 0 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases} = 2 \log y + 2y \frac{1}{y} \rightarrow -\infty$$

(Dunque $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$
non è derivabile)



PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE (trovare massimi e minimi)

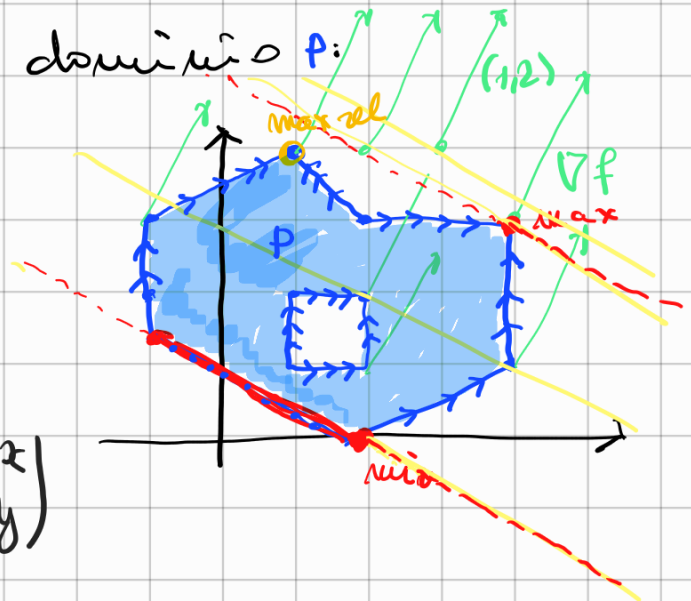
Es Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x + 2y \text{ sul dominio } P:$$

(PROGRAMMAZIONE LINEARE)

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in effetti $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



∇f indica la direzione con massima pendenza
(dove cresce più velocemente la funzione)

$(x, 1 - \frac{x}{2})$ sono tutti punti di minimo assoluto
(non isolati) (valore $f = 2$)

$(4, 3)$ è l'unico punto di massimo globale (anch'esso)
(valore $f = 10$)

Ci sono altri punti di massimo o minimo locali?
(relativi)

sì, $(1, 4)$ è max locale

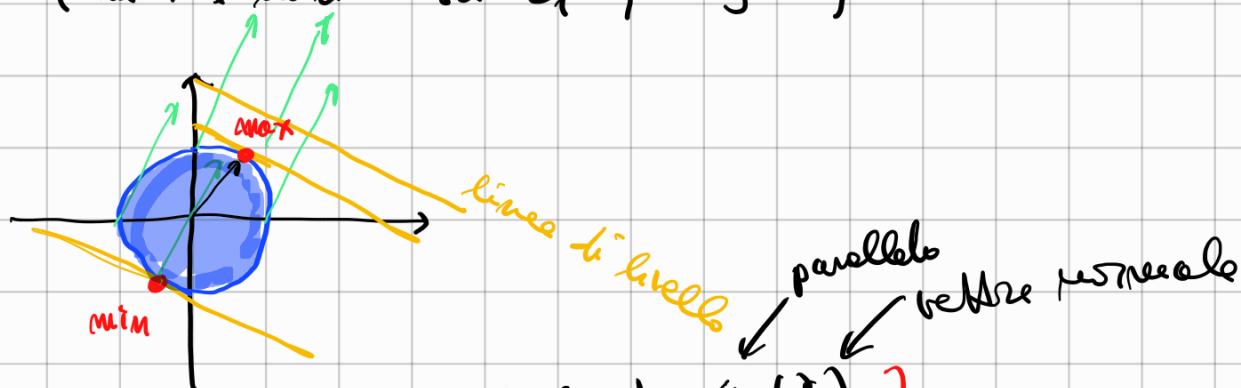
Derivata della fn. composta

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$$

$$g'(t) = \underbrace{Df(\gamma(t))}_{\text{prodotto di matrici}} \cdot \gamma'(t) = \langle \nabla f, \gamma' \rangle$$

ES Analogo ragionamento se il dominio non è poligonale

$$\begin{cases} f(x,y) = x+2y \\ \text{max e min su } D_1 = \{x^2+y^2 \leq 1\} \end{cases}$$



Trovo max e min ponendo $\nabla f(x,y) \parallel \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ \lambda^2 + 4\lambda^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

max assoluto isolato in $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$
 min assoluto isolato in $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

Spiegazione algebrica: f non ha massimi/minimi interni a D_1 perché non ha punti critici $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 (condizione necessaria del I ordine)

Weierstrass ci dice che massimo e minimo assoluti esistono su D_1 perché D_1 è compatto.

$\Rightarrow$ max/min sono su $\partial D_1 =$ circonferenza unitaria.

Parametrizzo ∂D_1 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\partial D_1 = \text{Im } \gamma$$

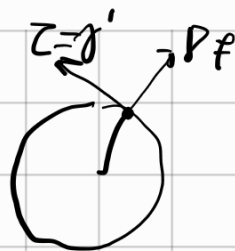
Cerco max/min $g(t) = f(\gamma(t))$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$g'(t) = \nabla f \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \tau$$

$$\nabla f \cdot \tau = 0 \Leftrightarrow \nabla f = \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore tangente}}}{\tau}$$

$$\nabla f = \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore normale}}}{\nu}$$



ES Trovare max/min di $f(x,y) = 2x^2y - x - y$ sul quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.

- ① f continua, Q compatto $\xrightarrow[\text{criterio I ordine}]{\text{Weierstra\ss}}$ $\exists$ max/min
- ② f derivabile $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ $\nabla f = 0$ nei max/min relativi interni.
- ③ Formula di Taylor al II ordine

Se un punto critico interno è max/min

D^2f è definita non positiva/ non negativa.

$$f = 2x^2y - x - y$$

$$\begin{cases} f_x = 4xy - 1 \\ f_y = 2x^2 - 1 \end{cases} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 4xy - 1 \\ 2x^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Punti critici:

$$\begin{cases} 4xy = 1 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pm \frac{4}{\sqrt{2}}y = 1 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{tasso nullo}$$

Notazione

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

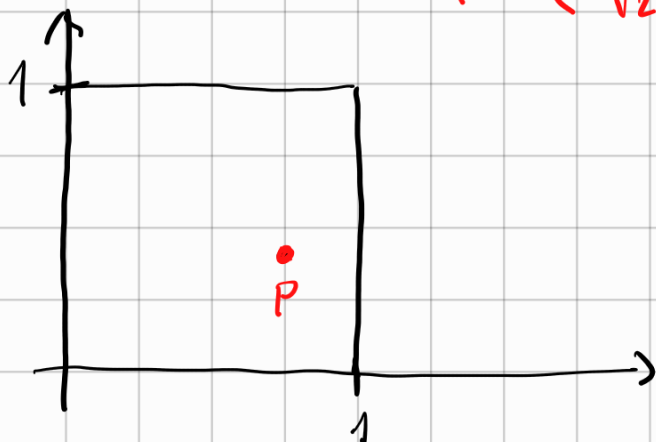
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

...

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \bar{e} \text{ interno!}$$

(l'altro non
mi interessa)



Verifichiamo la condizione al II ordine:

$$\begin{cases} f_x = 4xy - 1 \\ f_y = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4y & f_{xy} &= 4x \\ f_{yx} &= 4x & f_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 4y & 4x \\ 4x & 0 \end{pmatrix}$$

per Schwarz $\bar{e}$ simmetrica!
verifichiamo spettro

$\bar{e}$ simile a $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

$$\lambda X^2 + \mu Y^2$$

$$D^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det D^2 f = \lambda \cdot \mu, \quad \text{tr } D^2 f = \lambda + \mu$$

$$\lambda, \mu > 0 \quad \ominus$$

$$\lambda, \mu < 0 \quad \ominus$$

$$\lambda < 0 < \mu \quad \nabla$$

$$\det D^2 f = -16x^2 = -8$$

$$\text{in } P \quad \lambda, \mu < 0$$

$\Rightarrow$ PUNTO DI SELLA

non $\bar{e}$ ne' max ne' min.

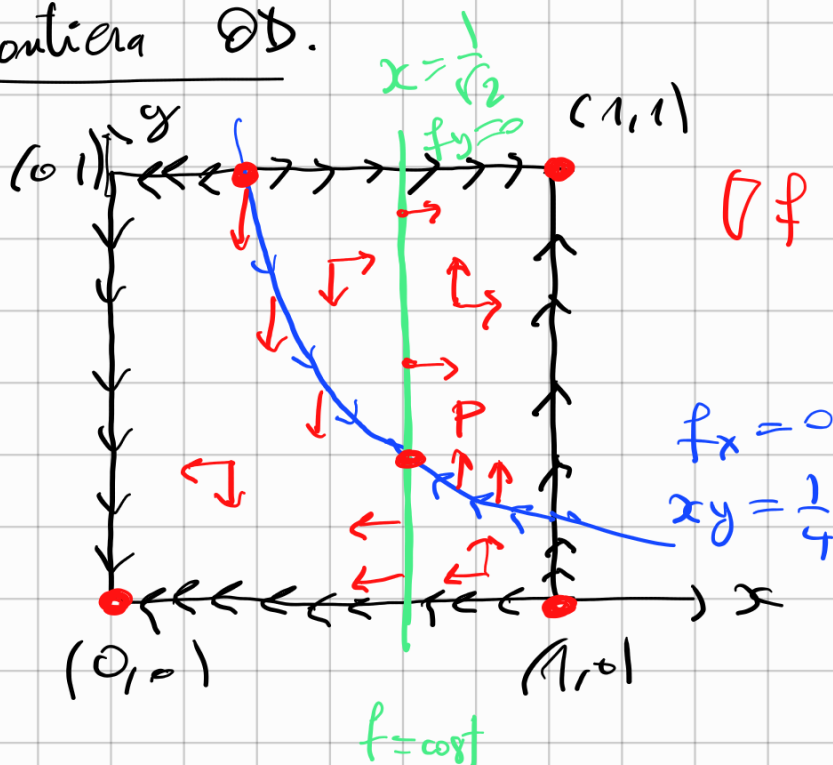


Ci concentriamo sulla frontiera ∂D .

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4xy - 1 \\ 2x^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Segno delle
derivate parziali

$$f_x = 4xy - 1 \geq 0 \\ xy \geq \frac{1}{4}$$



$$f_y = 2x^2 - 1 < 0 \quad x^2 < \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Punti "PAPABILI" $(1,1)$, $(\frac{1}{4}, 1)$, $(1,0)$, $(0,0)$

$$f(1,1) = 2 - 1 - 1 = 0 \quad \text{max assoluto}$$

$$f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8} \quad \text{min assoluto}$$

$$f(1,0) = -1$$

$$f(0,0) = 0 \quad \text{max assoluto}$$