

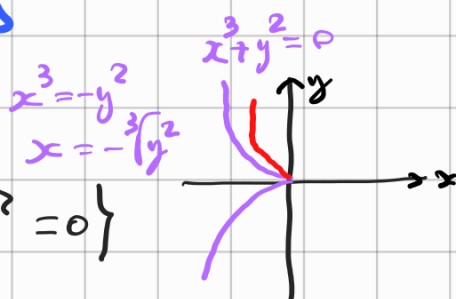
ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 9 - 16.10.2025

Es 7 test rettificabile

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^2}$$

$$\Gamma = \{x^3+y^2=0\}$$



$f: \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ f è continua

ma non si estende con continuità
in nessun punto di Γ .

• Fuori dall'origine $\lim f$ è $\pm\infty$. Es $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x, \sqrt{-x^3-\varepsilon}) = \pm\infty$

• $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f$ non esiste perché:

(i) $x=0$ $f(0,y) = 0 \rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0$

(ii) $x = -\sqrt[3]{y^2} + y^2$

$$\begin{aligned} y > 0 \quad f(-\sqrt[3]{y^2+y^2}, y) &= \frac{(\sqrt[3]{y^2+y^2}) y^2}{(-\sqrt[3]{y^2+y^2})^3 + y^2} = \frac{-y^{\frac{2}{3}} + o(y^{\frac{2}{3}})}{-y^2 + o(y^2) + y^2} \\ &= \frac{1 + o(1)}{o(y^{\frac{4}{3}})} \rightarrow \infty \end{aligned}$$



DIFFERENZIABILITA'

Def $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\bar{x} \in \overset{\circ}{A}$ (punto interno)
diciamo che f è differentiabile nel punto $\bar{x}$
se esiste $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare ($L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$)

$$f(x) = f(\bar{x}) + L[x - \bar{x}] + o(|x - \bar{x}|)$$

ovvero

$$f(x) - f(\bar{x}) - L[x - \bar{x}] = o(|x - \bar{x}|)$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - L[x - \bar{x}]}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$\left[\text{oss } m=n=1 \quad \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ x \mapsto c \cdot x \} \right. \\ \left. \begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + c \cdot (x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|) \\ &\quad \updownarrow \\ f'(\bar{x}) &= c \end{aligned} \right]$$

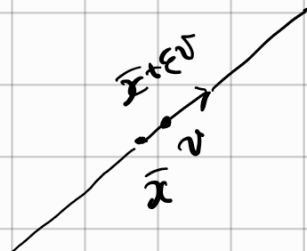
L si chiama differenziale di f nel
punto $\bar{x}$ e si indica con $df_{\bar{x}}$



legame tra differenziale e gradiente
e tra differenziabilità e derivabilità

$m=1$

Derivate direzionali: $v \in \mathbb{R}^n$ (già visto)



$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \epsilon v) - f(\bar{x})}{\epsilon} = \left[\frac{d}{d\epsilon} f(\bar{x} + \epsilon v) \right]_{\epsilon=0}$$

derivate
parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(\bar{x}) = \left[\frac{d}{d\epsilon} f(\bar{x} + \epsilon e_k) \right]_{\epsilon=0}$$

gradiente: $\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$

f si dice **derivabile** in $\bar{x}$ se esiste $\nabla f(\bar{x})$
(tutte le derivate parziali)

Teo f differenziabile in $\bar{x} \Rightarrow f$ è derivabile in $\bar{x}$
(in tutte le direzioni)
e (se $m=1$) $df_{\bar{x}}[v] = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$

dim Ipotesi: $f(x) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}[x - \bar{x}] + o(|x - \bar{x}|)$

Teri: $\forall v \in \mathbb{R}^n$: $\left[\frac{d}{d\epsilon} f(\bar{x} + \epsilon v) \right]_{\epsilon=0} = df_{\bar{x}}[v]$

Metto $x = \bar{x} + \epsilon v$ nell'ipotesi. v fissato

$$g(\epsilon) = f(\bar{x} + \epsilon v) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}[\epsilon v] + o(|\epsilon v|)$$

$$= f(\bar{x}) + \underbrace{\varepsilon \, df_{\bar{x}}[v]}_{\frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon v)} + o(|\varepsilon|)$$

$$\Rightarrow f'(0) = \left[\frac{d}{d\varepsilon} f(\bar{x} + \varepsilon v) \right]_{\varepsilon=0} = df_{\bar{x}}[v] \quad \square$$

Oss dunque f è differenziabile in $\bar{x}$ se e solo se f è derivabile in $\bar{x}$ e vale:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|)$$

(vedi lezione precedente).

Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x \cdot y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è derivabile (in tutte le direzioni) ma non è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Per il teo di sotto
 f è diff. bile in ogni
 $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0,0)$

Verifica $v = (v_1, v_2)$

$$f(\varepsilon v) = f(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2) = \frac{|\varepsilon| |v_1| \varepsilon v_2}{\sqrt{\varepsilon^2 v_1^2 + \varepsilon^2 v_2^2}} = \frac{\varepsilon |\varepsilon|}{|\varepsilon|} \frac{|v_1| v_2}{|v|} = \varepsilon \frac{v_1 v_2}{|v|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \left[\frac{d}{d\varepsilon} f(\varepsilon v) \right]_{\varepsilon=0} = \frac{v_1 v_2}{|v|} \quad \text{non è lineare in } v!$$

Dunque f non è differenziabile in $(0,0)$.

Caso vettoriale $m > 1$

f differenziabile in $\bar{x}$ $df_{\bar{x}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$df_{\bar{x}}$ si rappresenta con una matrice $Df(\bar{x}) = \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \Big|_m$

che si chiama (già visto) matrice Jacobiana
(in molti casi si indica comunque come $\nabla f(\bar{x})$)

$$df_{\bar{x}}[v] = df(\bar{x}) \cdot v = \langle \nabla f, v \rangle$$

$\begin{bmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{bmatrix}$ $\uparrow$
se $m=1$

Se $m=1$ $df_{\bar{x}} \in (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$

$V \simeq V^*$
ma l'isomorfismo
non è canonico

Oss $df_{\bar{x}}$ se esiste è unico! perché $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ se esiste è unico

dunque $\nabla f(\bar{x})$ se esiste è unico e $df_{\bar{x}}$ è univocamente determinato da $\nabla f(\bar{x})$.

(ma si poteva dimostrare direttamente esattamente come in Analisi 1).



Come dimostro che una funzione è differenziabile?

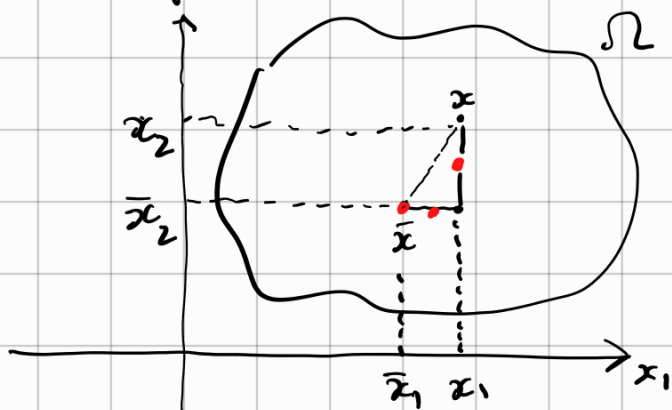
Es $f(x,y) = \frac{e^x - y^2}{\sqrt{x^2 + y^3}}$
è differenziabile?

Teo (del differenziale)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Se f è derivabile in ogni punto di Ω e se ∇f è continuo in Ω allora f è differenziabile in tutti i punti di Ω .

dim



$$\underline{f(x) - f(\bar{x})} = f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$= f(x_1, x_2) - f(x_1, \bar{x}_2)$$

$$+ f(x_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\stackrel{④}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_1}, x'_2) \cdot (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x'_1}, \bar{x}_2) \cdot (x_1 - \bar{x}_1)$$

Analisi 1.
sull'asse
Lagrange vertice
" orizzontale.

$$f(x) - f(\bar{x}) - \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle =$$

$$= \underbrace{f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}_{\text{Taylor expansion}} - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) (x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1', \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right) (x_1 - \bar{x}_1)$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2') - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right) (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$= o(1) (x_1 - \bar{x}_1) + o(1) (x_2 - \bar{x}_2) = o(1) \cdot O(|x - \bar{x}|) = o(|x - \bar{x}|)$$

for $x \rightarrow \bar{x}$

$$|x_k - \bar{x}_k| \leq |x - \bar{x}|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \leftarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} \xrightarrow{\text{same continue}}$$

$$(n=2) \quad \square$$

$(n > 2)$

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

$$(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$(x_1, x_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)$$

$\vdots$

$$(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(x_1, \dots, x_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k', \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n) (x_k - \bar{x}_k)$$

by Taylor

$$= o(1) \cdot O(|x - \bar{x}|) \quad \text{for } x \rightarrow \bar{x}$$

$$= o(|x - \bar{x}|)$$

$\square$

Oss Non vale il viceversa!

f differenziabile in $\Omega \not\Rightarrow \forall f$ continua.

Es (Analisi 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

CLASSI di REGOLARITA'

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Ω aperto

$$C^0(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m : \begin{array}{l} f \text{ continua} \\ \text{in } \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \Omega \end{array} \right\}$$

$$C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m : \begin{array}{l} f \text{ differenziabile} \\ \text{in } \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \Omega \text{ e} \\ Df \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n}) \end{array} \right\}$$

(teo)

$$= \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m : Df \text{ esiste e } Df \in C^0 \right\}$$

$$C^{n+1}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m : Df \text{ esiste, } Df \in C^n \right\}$$

FINE LEZIONE

Nota (POSTUMA) f differenziabile $\Rightarrow f$ continua, si dimostra esattamente come in ANALISI UNO:

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &= \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|) \\ &= o(1) + o(|x - \bar{x}|) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

per $x \rightarrow \bar{x}$

