ANALISI MATEMATICA 2
LEZIONE 2 — 29.9.2025

$x \in \mathbb{R}^n \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \qquad x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$0 \le |x-y|^2 = (x-y)\cdot(x-y) = |x|^2 + |y|^2 - 2x\cdot y \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \le \frac{|x|^2+|y|^2}{2}$$

è un quadrato

il prodotto è bilineare e simmetrico

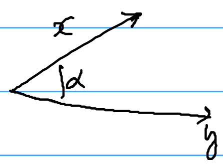
$$\Downarrow$$

$$|x \cdot y| \le \frac{|x|^2+|y|^2}{2}$$ [disuguaglianza di Young]

Se $|x| = |y| = 1 \qquad |x \cdot y| \le \frac{1+1}{2} = 1$

dunque

se $x, y \neq 0 \qquad \left| \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right| \le 1 \qquad$ cioè $\qquad |x \cdot y| \le |x| \cdot |y|$



$$-1 \le \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|} \le 1$$

definisco $\alpha = \arccos \frac{x\cdot y}{|x|\cdot|y|}$ così: $x \cdot y = |x| \cdot |y| \cos\alpha$

$$0 \le \alpha \le 2\pi$$

Esempi di funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(ANALISI UNO)

$m = 1 \qquad f$ è scalare $\qquad\qquad n = 1 \qquad f$ è funzione di una variabile

$m > 1 \qquad f$ è vettoriale $\qquad\qquad n > 1 \qquad f$ è funzione di più variabili

$m > 1 \qquad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \qquad\qquad n > 1 \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

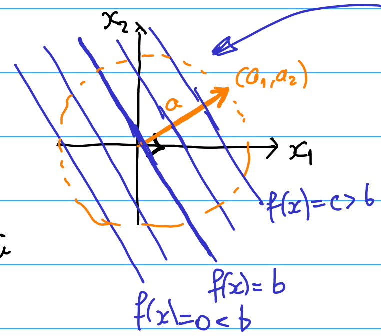
Funzioni scalari $(m=1)$

Es Funzioni lineari

$$f(x) = a\cdot x + b \qquad a\in\mathbb{R}^n,\ x\in\mathbb{R}^n,\ b\in\mathbb{R} \qquad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ y=f(x)$$

insiemi di livello: $f^{-1}(\{y\}) = \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=y\}$

Fibrazione del dominio con iperpiani paralleli



a: per la disug. di C-S è la direzione in cui f cresce più velocemente

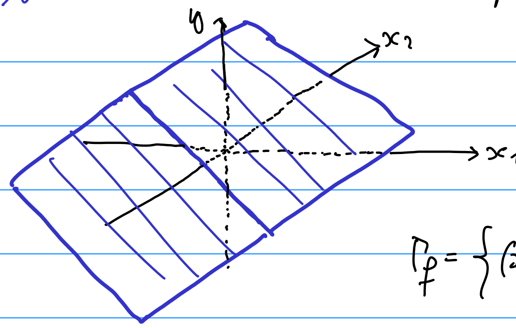


grafico di f

$$\Gamma_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : y=f(x)\}$$

Es. funzioni quadratiche $\qquad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^tAx + b\cdot x + c \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ b\in\mathbb{R}^n,\ c\in\mathbb{R}$$

A simmetrica.

a meno di traslazioni "verticali" $c=0$

a meno di traslazioni "orizzontali" $b=0$

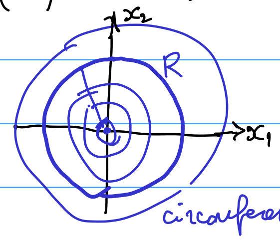
a meno di isomorfismi lineari (teorema spettrale) A è diagonale

$\Rightarrow$ si classifica in base al numero di autovalori positivi/negativi.

Esempio $\qquad f(x) = x_1^2 + x_2^2$

$x_1^2+x_2^2=R^2$

insiemi di livello



circonferenze

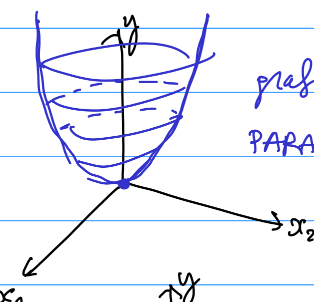
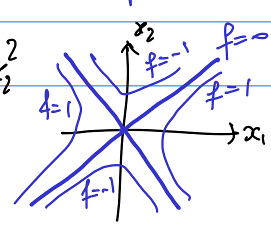


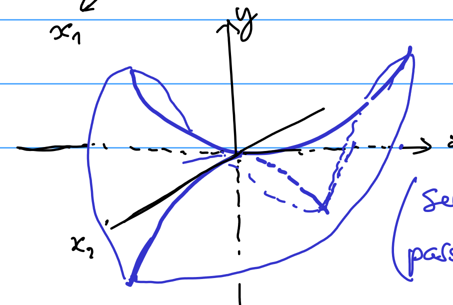
grafico $y=f(x)$

PARABOLOIDE

Esempio $\qquad f(x) = x_1^2 - x_2^2$

iperbole



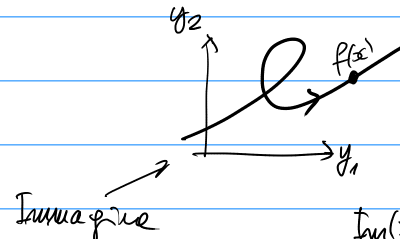


$y=f(x)$

sella (passo montano)

FUNZIONI VETTORIALI $m > 1$

$n = 1$: CURVE: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

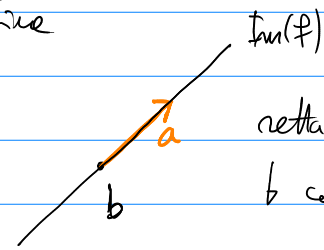


$\text{Im}(f) = f(\mathbb{R})$
$= \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ lineare

$f(x) = a \cdot x + b$

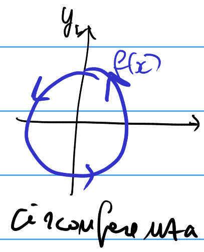
$x \in \mathbb{R} \qquad a, b \in \mathbb{R}^m$

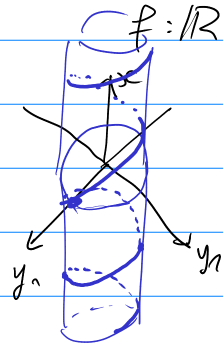


retta passante per b con direzione a

Es circonferenza $f(x) = (\cos x, \sin x)$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

immagine:

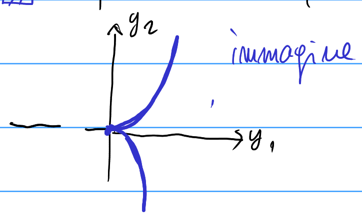


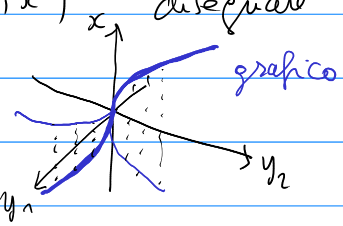


← grafico
elica cilindrica

Osservo: anche $f(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ descrive un arco di circonferenza.

Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x) = (x^2, x^3)$ disegnare l'immagine e il grafico di f

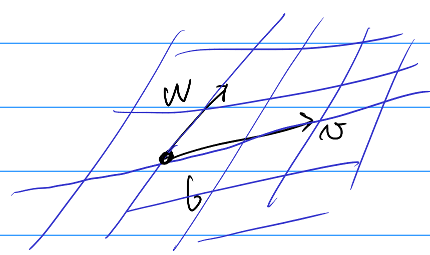




$n = 2$ SUPERFICI

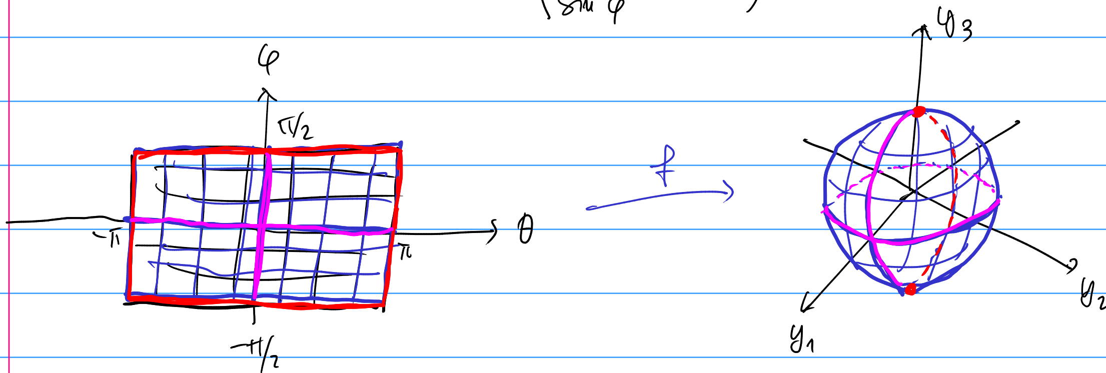
Es $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ lineare: $\quad f(x) = Ax + b \qquad x \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{m} \qquad b \in \mathbb{R}^m$

$y = f(x) \qquad f(x_1, x_2) = x_1 v + x_2 w + b \qquad A = \left(v \,\vdots\, w \right) \qquad v, w \in \mathbb{R}^m$



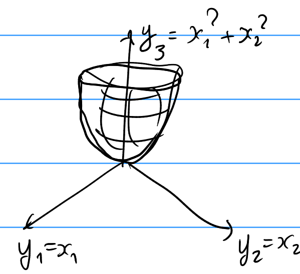
$f(\mathbb{R}^2)$ è un piano 2-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ passante per b parallelo a $\text{span}\{v, w\}$

Es sfera: $$f(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\theta \\ \cos\varphi \cdot \sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



Es cilindro?

Es paraboloide: $$f(x_1,x_2) = (x_1, x_2, x_1^2+x_2^2)$$

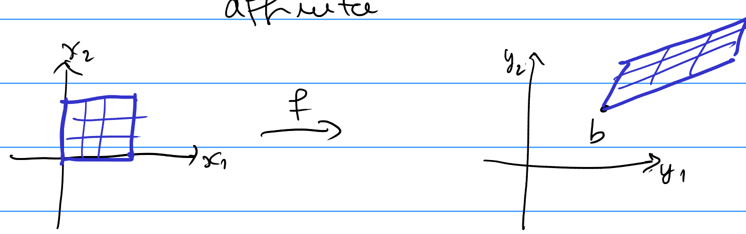


Caso $n=m$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

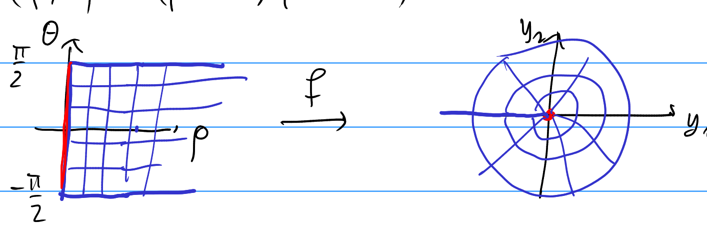
Es f lineare: $$f(x) = Ax+b \qquad A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ b\in\mathbb{R}^n$$

affinità



Es coordinate polari:

$$f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$



Es $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}$ $\quad f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$ $\qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$