1. (a) Al variare di $m \in \mathbb{R}$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 + 1 = mx.$$

   (b) Si consideri la funzione $g(m) = \max\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 = mx\}$. Determinare i valori di m in cui g è continua e i valori in cui g è derivabile.

   (c) Si calcoli $g'(0)$.

2. Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} \, dx.$$

3. (a) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x}{\sin y}, \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

   si trovi la soluzione, C^1, specificando l'intervallo I massimale di esistenza.

   (b) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(x(t)) \\ x'(t) = -\sin(y(t)) \\ y(0) = x(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

   (i) Si trovi l'intervallo J massimale di esistenza.

   (ii) Si provi che $y(t)$, $x(t) \in (0; \pi)$.

   (iii) Si studino, e nel caso esistano si calcolino, i limiti agli estremi di J della soluzione $(x(t), y(t))$.