1. (a) Al variare di $m \in \mathbb{R}$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 + 1 = mx.$$

(b) Si consideri la funzione $g(m) = \max\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 = mx\}$. Determinare i valori di m in cui g è continua e i valori in cui g è derivabile.

(c) Si calcoli $g'(0)$.

Soluzione. Possiamo osservare che $x = 0$ non è soluzione per alcun valore di $m \in \mathbb{R}$. Dunque, dividendo per x, otteniamo una equazione equivalente:

$$x^2 + \frac{1}{x} = m.$$

La funzione $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$, tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, ad $+\infty$ per $x \to 0^-$, a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

La derivata prima è

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$

La derivata prima si annulla per $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, è positiva per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e negativa per $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Dunque f è strettamente decrescente per $x < 0$ ed avendo limiti di segno opposto a $-\infty$ e 0^-, l'equazione ha una soluzione $x_1 < 0$ per ogni $m \in \mathbb{R}$ per il teorema dei valori intermedi.

Per $x > 0$ la funzione ha un minimo in $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ dove assume il valore

$$m_0 = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > 0.$$

Dunque per $m > m_0$ si sono due soluzioni positivie $x_2, x_3 > 0$, per $m = m_0$ le due soluzioni coincidono e si ha una unica soluzione $x_2 = x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ nel punto di minimo, per $m < m_0$ non ci sono soluzioni positive.

Riassumendo, l'equazione ha: una soluzione per $m < m_0$, due soluzioni per $m = m_0$ e tre soluzioni per $m > m_0$.

□

2. Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{n}}{x}\, dx.$$

3. (a) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x}{\sin y}, \\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

si trovi la soluzione, C^1, specificando l'intervallo I massimale di esistenza.

(b) Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(x(t)) \\ x'(t) = -\sin(y(t)) \\ y(0) = x(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

i) Si trovi l'intervallo J massimale di esistenza.

ii) Si provi che $y(t)$, $x(t) \in (0; \pi)$.

iii) Si studino, e nel caso esistano si calcolino, i limiti agli estremi di J della soluzione $(x(t), y(t))$.

SOLUZIONE

(a) La funzione $f(a, b) = -\frac{\sin a}{\sin b}$, nel suo dominio di definizione $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, è continua con la sua derivata rispetto a b, nel complesso delle due variabili. Quindi son verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale.

L'equazione differenziale del problema di Cauchy è a variabili separabili: tenendo presente che $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ l'intervallo massimale di esistenza I deve esser un intervallo a cui appartiene $\frac{\pi}{2}$, e deve esser $0 < y(x) < \pi$, per cui $\sin y(x) \neq 0$, per $x \in I$.

Moltiplicando per $\sin y$, si ha $y'(x)\sin(y(x)) = -\sin x$, $0 < y(x) < \pi$, $x \in I$, integrando tra $\frac{\pi}{2}$ ed x si ottiene quindi $\begin{cases} \cos(y(x)) = -\cos x, & x \in I, \\ 0 < y(x) < \pi, & x \in I. \end{cases}$,

cioè $\begin{cases} y(x) = \arccos(-\cos x), & x \in I, \\ 0 < y(x) < \pi, & x \in I, \end{cases}$.

La funzione $\arccos(-\cos x)$ è pari, 2π periodica, e per $x \in [0; \pi]$, essendo $\pi - x \in [0; \pi]$, si ha $\arccos(-\cos x) = \arccos(\cos(\pi - x)) = \pi - x$. Quindi essa è C^1 solo negli intervalli aperti $(k\pi; (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, e l'unico tra questi che contiene $\frac{\pi}{2}$ è $I = (0; \pi)$.

Concludendo l'unica soluzione C^1 del problema di Cauchy è

$$y(x) = \pi - x, \quad x \in (0; \pi).$$

(b)

i) La funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, $F(a, b) = (\sin a, -\sin b)$ è continua con tutte le sue derivate quindi il problema di Cauchy vettotriale ha un'unica soluzione. Inoltre essendo $|F(a, b)| \leq \sqrt{2}$ la funzione F è limitata e quindi a crescita al più lineare: vi è sistenza globale per cui $J = \mathbb{R}$.

ii), iii) È meglio non rispondere nell'ordine alle domande poste ma procedere come segue.

a) Per continuità della soluzione, visto il dato iniziale, in un intervallo U, intorno di $t = 0$, deve essere $0 < x(t), y(t) < \pi$,

$t \in U$, pertanto $x(t)$, $y(t)$ devono, rispettivamente, essere strettamente decrescente, e strettamente crescente in U, infatti: $x'(t) = -\sin y(t) < 0$, $y'(t) = \sin x(t) > 0$per $t \in U$.

b) In particolare $x : U \to \mathbb{R}$ è invertibile. Sia $t : x(U) \to U$ la sua inversa, che ha come derivata il reciproco della dervata di x: si considera la funzione $v(x) = y(t(x))$, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx}(x) = y'(t(x))\dfrac{dt}{dx}(x) = \dfrac{\sin x(t(x))}{-\sin y(x(t))} = -\dfrac{\sin x}{\sin(v(x))} \quad x \in x(U), \\ v(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

pertanto $v(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$.

c) Quindi si ha $y(t) = y(t(x(t)) = v(x(t)) = \pi - x(t), \quad t \in U$. Quindi $y' = -x' = -(-\sin y) = \sin y$ per $t \in U$.

Ma il problema di Cauchy $\begin{cases} \phi' = \sin \phi \\ \phi(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, ha un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$, e poichè l'equazione di quest'ultimo problema ha come soluzioni costanti 0 e π, per unicità, deve esser: $0 < \phi(t) < \pi$.

Quindi $\phi' = \sin \phi > 0$, e ϕ è strettamente crescente, e quindi avere limiti per $t \to +\infty$, e $t \to -\infty$. Dalla teoria si ha che la derivata deve essre allora infinitesima per $t \to \pm\infty$, da cui segue

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \pi, \quad \lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0.$$

d) La funzione $(\pi - \phi(t), \phi(t))$ per costruzione è un prolungamento C^1 a tutto $\mathbb{R}$ della soluzione $(x(t), y(t))$ che si è studiata per $t \in U$. Poichè la $(\pi - \phi(t), \phi(t))$ stessa è soluzione del problema di Cauchy $((\pi - \phi)' = -\phi' = -\sin \phi$, $\phi' = \sin \phi = \sin(\pi - \phi))$, per unicità della soluzione al problema di Cauchy deve essere

$$x(t) = \pi - \phi(t), \quad y(t) = \phi(t),$$

provando così sia ii) che iii).

OSSERVAZIONE Il problema di Cauchy vettoriale della domanda b) si puørisolvere esplicitamente. Infatti il secondo problema di Cauchy ausiliario $\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, con equazione a variabili separabili, si risolve esplicitamente. Per trovare la primitiva $\int \frac{1}{\sin y}\, dy$, si usa la sostituzione $z = \tan(\frac{y}{2})$, $dy = \frac{2}{1+z^2}dz$, e poichè $\sin y = \frac{2z}{1+z^2}$, si ottiene

$$\int \frac{1}{\sin y}\, dy = \log\tan(\frac{y}{2})$$

per cui, tenendo conto della condizione iniziale, si ha $\log\tan\frac{y(t)}{2} = t$, cioè, esplicitando:

$$y(t) = 2\mathrm{artan} e^t, \quad x(t) = \pi - 2\mathrm{artan} e^t.$$