

Analisi Matematica A e B

Prova parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2024/25
Università di Pisa

5 aprile 2025

1. Determinare la funzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} e^x \cdot u' + 1 = u, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2. \end{cases}$$

2. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{u^2}{1+x^2}, \\ u(0) = y. \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che se $u(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale $u' = \frac{u^2}{1+x^2}$ anche $-u(-x)$ è soluzione.
- (b) Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy.
- (c) Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione e gli $y \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione è limitata.
- (d) Sia u la soluzione dell'equazione definita su tutto $\mathbb{R}$ con $u(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Mostrare che $u(x) = x + o(1)$ per $x \rightarrow +\infty$.
3. (a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$u'' - u' = 1$$

- (b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$u'' - u' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' - \frac{1}{1+x^2}.$$