# ANALISI MATEMATICA B
# LEZIONE 68 – 31.3.2025

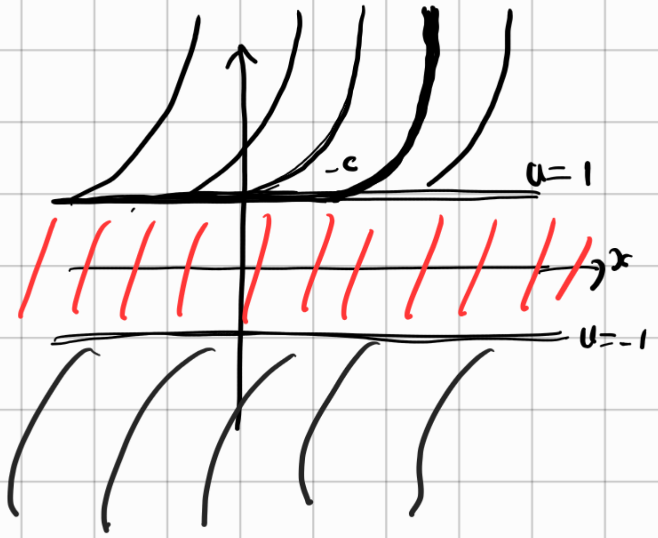
Esercizio $u' = \sqrt{u^2-1}$ $\qquad$ $u' = f(x,u)$

Trovare tutte le soluzioni.

$u^2-1 \geq 0$ $\qquad u^2 \geq 1$ $\qquad u \geq 1$ o $u \leq -1$

Soluzioni stazionarie

$\sqrt{u^2-1} = 0$ $\qquad u=1$ e $u=-1$




Su ogni intervallo in cui $u^2 \neq 1$ posso dividere per $\sqrt{u^2-1}$:

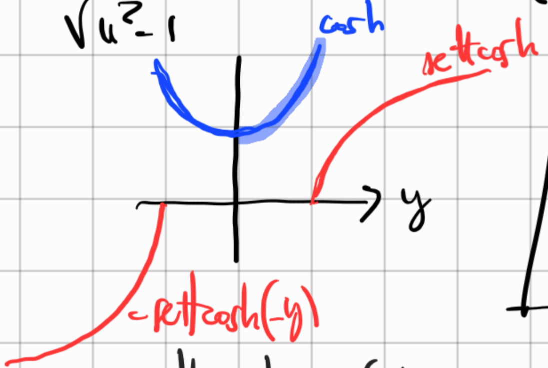
$$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}} = 1$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = x + c$$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

$\cosh^2 - 1 = \sinh^2$

$\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} = \text{settcosh}' u$ (se $u>1$)




$\boxed{\text{oppure } \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} = -\text{settcosh}'(-u) \text{ se } u<-1}$

$\text{settcosh}' x = \frac{1}{\sinh(\text{settcosh}\, t)} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$

$\text{settcosh}\, u(x) = x + c$ $\qquad (u>1)$

$$u(x) = \cosh(x+c)$$

$x + c > 0$ $\qquad x > -c$

per $x \to -c^+$ $\qquad u(x) \to 1$

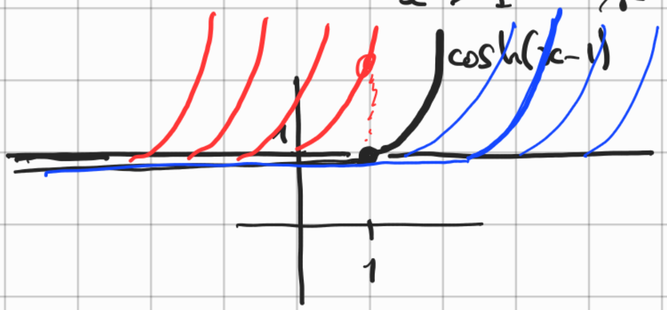
Se avessi avuto: $\begin{cases} u' = \sqrt{u^2-1} \\ u(1) = 1 \end{cases}$

Se ci fosse una soluzione unica risolverei

$$\begin{cases} \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}} = 1 \\ u(1) = 1 \end{cases} \rightsquigarrow u(x) = \cosh(x-1)$$

ma non è corretto

$x > 1$ si estende anche in $x=1$




ma $u=1$ è pure soluzione

$$u(x) \begin{cases} \cosh(x-1) & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Tutte le soluzioni (con dato $u(1)=1$) sono della forma:

$$u_c(x) = \begin{cases} \cosh(x-c) & \text{se } x \geq c \\ 1 & \text{se } x \leq c \end{cases}$$

con $c \geq 1$.

---

$u' = f(u)$ con $f(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$

posso dividere per $f(u)$ dove $f(u) \neq 0$

cioè negli intervalli in cui $u>0$:

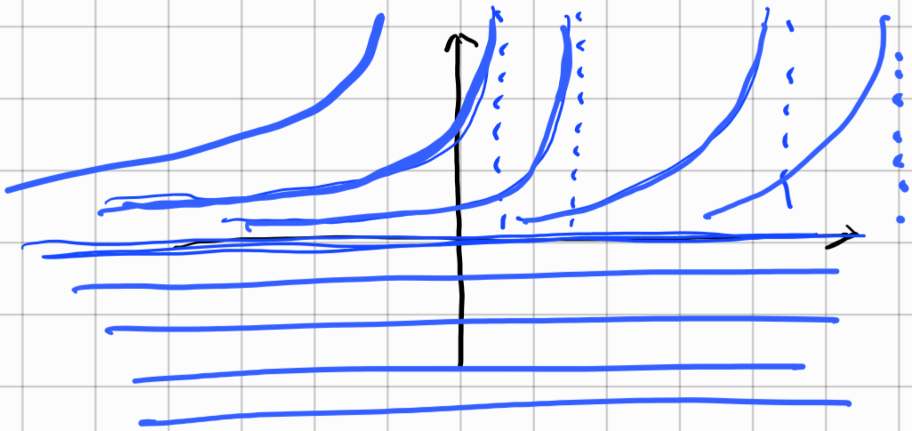
$$\frac{u'}{u^2} = 1 \qquad\qquad -\frac{1}{u} = x + c$$

$$u(x) = \frac{1}{-x-c} = \frac{1}{x_0 - x} \qquad x_0 = c$$

$$x < x_0$$

---

dove $u \leq 0$ allora $u' = 0 \Rightarrow u$ costante



$$u' = \sin\left(\frac{1}{u}\right) \qquad\qquad \sin\frac{1}{u} = 0 \text{ per } u = \frac{1}{k\pi}$$

---

OSS)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \begin{cases} \text{settcosh } x & \text{se } x > 1 \\ -\text{settcosh}(-x) & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$(\text{settcosh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

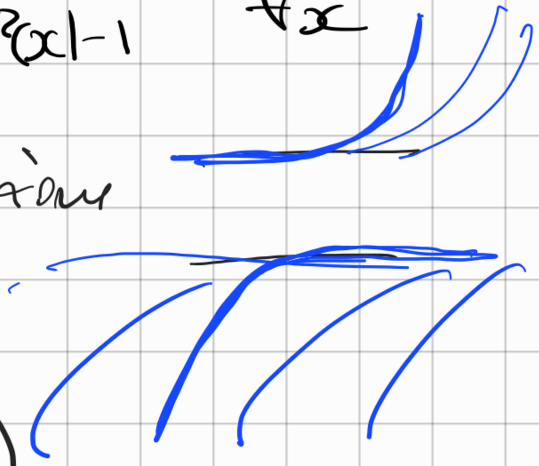
$$(\text{settcosh}(-x))' = \frac{-1}{\sqrt{(-x)^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

---

Possiamo fare dei cambi di variabile in una equazione differenziale.

Si può fare per trovare eventuali simmetrie.

$$u' = \sqrt{u^2-1} \qquad u'(x) = \sqrt{u^2(x)-1} \quad \forall x$$



sospetto che se $u(x)$ è soluzione

anche $v(x) = -u(-x)$

$$v'(x) = -u'(-x)\cdot(-1)$$
$$= u'(-x) = \sqrt{u^2(-x)-1}$$
$$= \sqrt{(-v(x))^2-1} = \sqrt{v^2(x)-1}$$

cioè $v'(x) = \sqrt{v^2(x)-1}$

cioè $v$ è un'altra soluzione della stessa equazione.

---

(Vedi "ALTRI METODI RISOLUTIVI")

$$u' = a(x)\,u + b(x)\,u^{\alpha} \qquad \boxed{\text{(eq. di Bernoulli)}}$$

si risolve dividendo tutto per $u^{\alpha}$ e ponendo

$v(x) = u(x)^{1-\alpha}$. (

Es $\quad u'(x) = u + x u^2 \qquad (\alpha=2)$

$$u'(x) \cdot u^{-2} = u^{-1} + x$$

$$v(x) = \frac{1}{u(x)} \qquad v'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

$$-v' = v + x$$

$$v' + v = -x$$

Moltiplico tutto per $e^x$

$$v' e^x + v e^x = -x e^x$$

$$(v \cdot e^x)' = -x e^x$$

$$\int x e^x = (ax+b) e^x$$

$$[(ax+b)e^x]' = (a+b+ax) e^x \overset{!}{=} x e^x$$

$$a=1 \quad b=-1$$

$$\int x e^x = (x-1) e^x$$

$$v \cdot e^x = -(x-1) e^x + c$$

$$v = 1-x + c e^{-x}$$

## Metodo Alternativo

$v' + v = -x$ è a coefficienti costanti

$P(\lambda) = \lambda + 1 \qquad \lambda_1 = -1$

$v = e^{-x}$ è soluzione dell'omogenea.

tutte le sol. dell'omogenea sono $v = ce^{-x}$

Basta trovare $v_*$ sol. della non omogenea:

Metodo di similarità:

$v_* = ax + b$ ← polinomio dello stesso grado di $x$

$v_*' = a$

$a + ax + b \overset{!}{=} -x \qquad a = -1 \quad b = 1$

$v_*(x) = 1 - x$

La soluzione generale è (completa) $\underline{v(x) = 1 - x + ce^{-x}}$

Conclusione: dobbiamo trovare $u$!

$$u(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{1 - x + ce^{-x}}$$

funzione di una variabile

f ha due variabili

$$u' = x \cdot u(x) = f(x, u(x))$$

$$f(x,y) = x \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$x \cdot y$ è $C^\infty$ $\qquad x\sqrt{y}$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{3}} = x \cdot |x|^{-\frac{2}{3}}$$

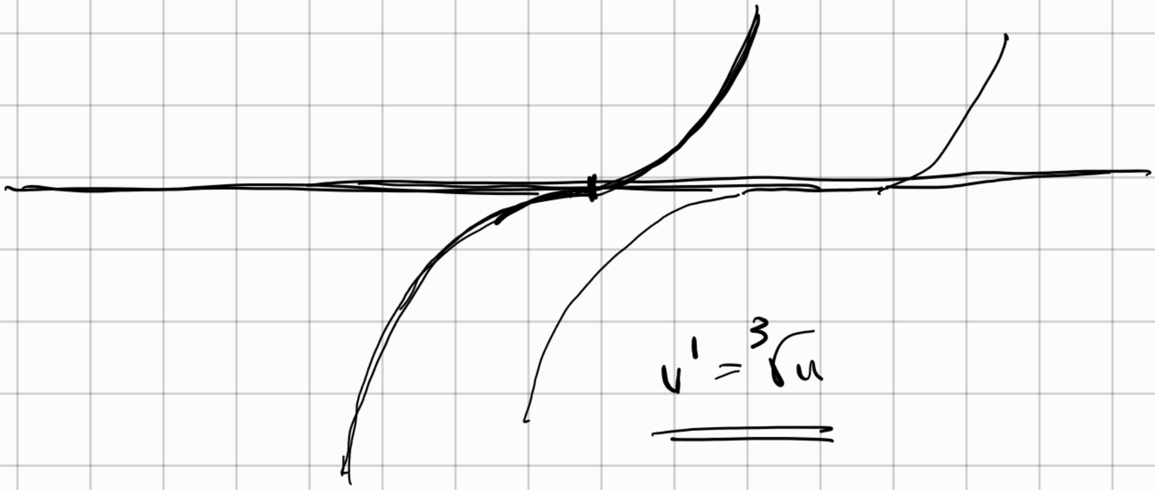
---

$$P(\lambda)[u] = q(x)\, e^{\mu x}$$

$u_*(x) = \tilde{q}(x)\, e^{\mu x}$ se $P(\mu) \neq 0$ $\qquad m = 0$

se $P(\mu) = 0$ $\qquad u_*(x) = \tilde{q}(x)\, x^m e^{\mu x}$

$m$



$$u' = \sqrt[3]{u}$$

$$\frac{u'}{\sqrt[3]{u}} = 1$$

$$u^{-\frac{1}{3}} u' = 1$$

$$\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{u^3}} = x + c$$

---

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}}\, dx$$

settcosh = ln .....

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^x + \frac{1}{e^x} \qquad t = e^x$$

$$= t + \frac{1}{t} \qquad 2yt = t^2 + 1$$

$$t^2 - 2yt + 1 = 0 \qquad t = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$x = \ln t = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$$

$$x = \operatorname{settcosh} y$$

$u(x)$ sol.

$\Updownarrow$

$-u(-x)$ sol.