GAMMA CONVERGENZA

(VEDERE APPUNTI DI MASSIMO GOBBINO)
(O A. BRAIDES "Γ-CONVERGENCE FOR BEGINNERS")

NOZIONE DI CONV. DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI CHE GARANTISCA LA CONVERGENZA DEI MINIMI.

DEF:

SIA X SP. METRICO E $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ SUCCESSIONE.

DICIAMO CHE $f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f$ (f_n GAMMA CONVERGE A f) SE:

1. (DIS. DEL liminf) $\forall x_n \to x$ in X, $f(x) \leq \liminf_n f_n(x_n)$
2. (DIS. DEL limsup) $\forall x \ \exists x_n \to x$ T.C. $f(x) \geq \limsup_n f_n(x_n)$

[SE VALE 1 IL $\geq$ È UN $=$]

x_n IN DUE SI CHIAMA RECOVERY SEQUENCE.

OSS: SE $f_n = f \ \forall n \Rightarrow f_n \xrightarrow[\Gamma]{} \bar{f}$ RILASSATO DI f.

IN GENERALE È UNA NOZIONE DIVERSA DALLA CONV.

PUNTUALE O UNIF. DELLE f_n. VALE PERÒ:

PROP: SE $f_n \to f$ UNIF. SUI COMPATTI DI X

E f È S.C.I. $\Rightarrow f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f$.

DIM: limsup: DATO $x \in X$ PRENDIAMO $x_n = x \ \forall n$

$\Rightarrow f(x) = \lim_n f_n(x_n)$.

liminf: SIA $x_n \to x$ E SIA $K = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\} \subseteq X$ COMPATTO.

$f_n \to f$ UNIF. SU $K \Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon$ T.C. $f_n(y) \geq f(y) - \varepsilon \quad \forall y \in K$
e $\forall n > n_\varepsilon$

$$\Rightarrow \liminf_n f_n(x_n) \underset{x_n \in K}{\geq} \liminf_n f(x_n) - \varepsilon \underset{f \text{ s.c.i.}}{\geq} f(x) - \varepsilon$$

CIOÈ $f(x) \leq \liminf_n f_n(x_n) + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$

OSS: IN GENERALE, SE $f_n \to f$ UNIF. SUI COMPATTI, $\Rightarrow f_n \xrightarrow[\Gamma]{} \bar{f}$.

IL Γ-LIMITE DI UNA SUCC. f_n È SEMPRE S.C.I.

PROP. $f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f \Rightarrow f$ È S.C.I.

DIM: SIA $x \in X$ E $x_n \to x$.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $f(x) \leq \liminf_n f(x_n)$.

$\forall n \; \exists z_{n,k}$ RECOVERY SEQUENCE PER x_n

T.C. $z_{n,k} \xrightarrow[k]{} x_n$ E $f(x_n) = \lim_k f_k(z_{n,k})$.

SCELGO k_n T.C. $d(x_n, z_{n,k}) \leq \frac{1}{n}$ E $\boxed{f_k(z_{n,k}) \leq f(x_n) + \frac{1}{n}}$ $\forall k \geq k_n$.

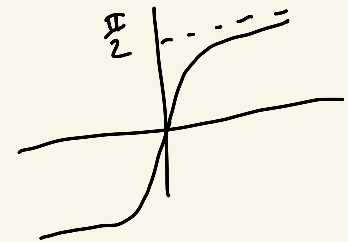
SE PONGO $\boxed{\tilde{x}_n = z_{n,k_n}}$ HO $d(x, \tilde{x}_n) \leq d(x, x_n) + \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\tilde{x}_n \to x$.

$$\Longrightarrow \quad f(x) \leq \liminf_n f_{k_n}(\tilde{x}_n) \leq \liminf_n \left[f(x_n) + \frac{1}{n} \right] = \liminf_n f(x_n).$$

liminf

ESEMPI: 1 $\quad f_n(x) = \arctan(nx)$



$$f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

PUNTUALMENTE E UNIF. SUI CPT. DI $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\Longrightarrow \quad K \subseteq (0, +\infty) \qquad f_n\big|_K \xrightarrow[r]{} \frac{\pi}{2}$$

$$K \subseteq (-\infty, 0) \qquad f_n\big|_K \xrightarrow[K]{} -\frac{\pi}{2}.$$

MOSTRIAMO CHE $\quad f_n(x) \xrightarrow[r]{} \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x \leq 0 \end{cases}.$

liminf: $x \neq 0$ e $x_n \to x$, $f_n(x_n) \xrightarrow[n]{} \overline{f}(x)$.

$x = 0$ e $x_n \to x$ $\quad \overline{f}(0) = -\frac{\pi}{2} \leq \inf_{\mathbb{R}} f_n \leq \liminf_n f_n(x_n)$

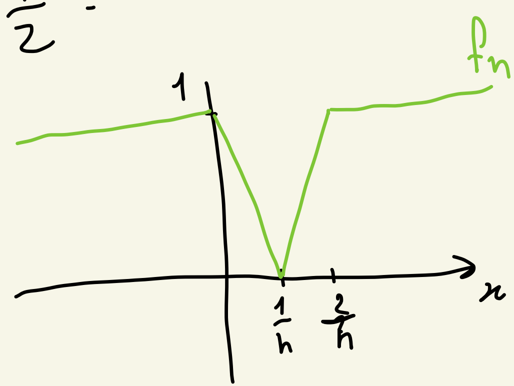
limsup: $x \neq 0$ basta PRENDERE $x_n = x$.

$x = 0$ POSSO PRENDERE x_n T.C. $f_n(x_n) = \arctan(n x_n) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$

HO $x_n \to 0$ e $f_n(x_n) \to \overline{f}(0) = -\frac{\pi}{2}$.

2

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \text{ e } x \geq \frac{2}{n} \\ 1 - nx & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ -1 + nx & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \end{cases}$$



$f_n(x) \to 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e UNIF. SUI CPT. DI $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

MOSTRIAMO CHE $f_n \xrightarrow[\Gamma]{} f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\underline{\liminf}$: $x \neq 0 \quad x_n \to x \Rightarrow f_n(x_n) = 1$ DEF. IN n

$\Rightarrow f(x) = \lim_n f_n(x_n)$

$x = 0 \quad x_n \to x \Rightarrow f(0) = 0 \leq \min_{\mathbb{R}} f_n \leq \liminf_n f_n(x_n)$

$\underline{\limsup}$: $x_n \neq 0$ PRENDO $x_n = x$.

$x = 0$ PRENDO $x_n = \frac{1}{n}$, $f_n(x_n) = \min_{\mathbb{R}} f_n = 0$,

$\Rightarrow f(0) = 0 = \lim_n f_n(x_n)$.