RILASSAMENTO

$F : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\quad$ X sp. metrico

[TIPICAMENTE $X = \{u \in W^{1,p}(I) : \|u\|_{W^{1,p}} \leq C\}$ CON LA CONV. DEBOLE, QUESTO È UNO SP. METRICO SE $1 < p < +\infty$]

DEF: IL RILASSATO DI F È $\overline{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ DEFINITO DA

$$\overline{F}(x) = \inf_{x_n \to x} \liminf_n F(x_n)$$

OSS: PRENDENDO $x_n = x \ \forall n$ SI HA $\overline{F} \leq F$

OSS: $\forall x \in X, r > 0, \varepsilon > 0 \ \exists y \in B_r(x)$ T.C. $F(y) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$

INFATTI SE PER ASSURDO $F > \overline{F}(x) + \varepsilon$ SU $B_r(x) \Rightarrow \liminf_n F(x_n) \geq \overline{F}(x) + \varepsilon$ $\forall x_n \to x$. ASSURDO.

PROP: $\overline{F} = \max\{G : G : X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ È S.C.I. E $G \leq F\}$.

DIM: SIA G S.C.I. CON $G \leq F$.

FISSIAMO $x \in X$ E $\varepsilon > 0$. PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE

$\exists\, x_n \to x$ T.C. $\liminf_n F(x_n) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad G(x) \leq \liminf_n G(x_n) \leq \liminf_n F(x_n) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad G \leq \overline{F}.$$

RESTA DA MOSTRARE CHE $\overline{F}$ È S.C.I.

SIA $x \in X$, $x_n \to x$, E SIA $\varepsilon > 0$. PER L'OSS. $\exists\, \tilde{x}_n \in B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$

T.C. $F(\tilde{x}_n) \leq \overline{F}(x_n) + \varepsilon$. NOTIAMO CHE $\tilde{x}_n \to x$.

$$\Rightarrow \quad \overline{F}(x) \leq \liminf_n F(\tilde{x}_n) \leq \liminf \overline{F}(x_n) \cancel{+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \overline{F} \text{ È S.C.I.}$$

OSS: $\overline{F} + \overline{G} \leq \overline{F+G}$

INFATTI $$\overline{F}(x) + \overline{G}(x) = \inf_{\substack{x_n \to x \\ y_n \to x}} \left[\liminf_n F(x_n) + \liminf_n G(y_n) \right]$$

$$\leq \inf_{x_n \to x} \left[\liminf_n F(x_n) + \liminf_n G(x_n) \right]$$

$$\leq \inf_{x_n \to x} \liminf_n \left[F(x_n) + G(x_n) \right] = \overline{F+G}\,(x)$$

SE G È CONTINUA IN X SI HA PERÒ

$$\overline{F} + G = \overline{F+G}.$$

ES: $\overline{F}(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ s.c.i.

$G(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ s.c.s.

$F+G = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$

$\overline{F} = F \qquad \overline{G} = F$

$\overline{F} + \overline{G} = 2F = \overline{F+G}$

ES: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ s.c.i. $\qquad G(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ s.c.s. $\qquad (F+G)(x) = 0 \ \forall x$

$\overline{F} = F \qquad \overline{G} = 0 \qquad \overline{F} + \overline{G} = F < \overline{F+G} = F+G = 0.$

OSS: $\inf\limits_X F = \inf\limits_X \overline{F}$

$$\left[\forall x \ \forall \varepsilon \ \exists y \text{ t.c. } F(y) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon \Rightarrow \inf\limits_X F \leq \inf\limits_X \overline{F} + \varepsilon \quad \forall \varepsilon \right]$$

DEF: $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ È COERCIVA SE $\overline{\{F \leq c\}}$ $\left(\text{EQUIV. } \overline{\{F < c\}}\right)$

È COMPATTO IN X $\forall c \in \mathbb{R}$

PROP: F COERCIVA $\Rightarrow$ $\overline{F}$ È COERCIVA

DIM: SIA $c \in \mathbb{R}$ E SIA x_n CON $\overline{F}(x_n) \leq C$ $\forall n$.

PER L'OSS., DATO $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\tilde{x}_n$ T.C. $F(\tilde{x}_n) \leq \overline{F}(x_n) + \varepsilon \leq C + \varepsilon$

POICHÉ F È COERCIVA $\exists$ $\tilde{x}_{n_k} \to x \in X$.

$\overline{F}(x) \leq \liminf_k \overline{F}(\tilde{x}_{n_k}) \leq c$ $\Rightarrow$ $x \in \{\overline{F} \leq c\}$

$\Rightarrow$ $\{\overline{F} \leq c\}$ È COMPATTO.

OSS: DATO CHE $\overline{F}$ È S.C.I. $\{\overline{F} \leq c\} = \overline{\{\overline{F} \leq c\}}$ È UN INSIEME CHIUSO

TEO (WEIERSTRASS): $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ COERCIVA

$\Rightarrow \overline{F}$ COERCIVA ED $\exists\, \bar{x}$ minimo di $\overline{F}$ su X,

IN PART. $\overline{F}(\bar{x}) = \min_X \overline{F} = \inf_X F$.

CONSIDERIAMO ORA $X = W^{1,p}(I)$, $1 < p < +\infty$, E $\mathcal{L}(u) = \int_I L(x, u, u')$.

OSS: SE L CONT., $L \geq c$, $z \to L(x, y, z)$ CONVESSA $\forall\, (x, y)$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ È S.C.I. PER LA CONV. DEBOLE $\Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$.

IN GENERALE VALE IL SEGUENTE

TEOREMA $\mathcal{L}(u) = \int_I L(x,u,u')\,dx$ CON $u \in W^{1,p}(\bar{I})$ $1 < p < +\infty$

E L VERIFICA

- L CONTINUA
- $c \leq L(x,y,z) \leq C(1+|y|^p+|z|^p)$

$A = \{u \in W^{1,p} : u-u_0 \in W_0^{1,p}$ CON $u_0 \in W^{1,p}$ E $\mathcal{L}(u_0) < +\infty\}$

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathcal{L}}(u) = \int_I L^{**}(x,u,u')\,dx$$

DOVE IL RILASSATO È FATTO RISP. ALLA CONV. DEBOLE $W^{1,p}$ IN A

E $L^{**}(x,y,z) = \max\{G(x,y,z) : G \leq L$ E $z \to G(x,y,z)$ CONVESSA $\forall (x,y)\}$

DIM. (CENNO) $\tilde{\mathcal{L}}(u) = \int_I L^{**}(x,u,u')\,dx$ È S.C.I.

PER IL TEO DI SEMICONTINUITÀ $\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(u) \leq \overline{\mathcal{L}}(u)$.

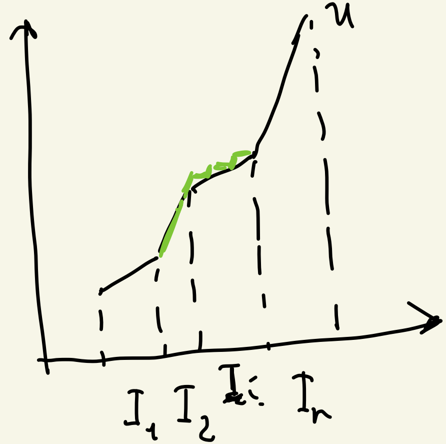
PER VEDERE CHE VALE IL $\geq$ DEVO TROVARE, $\forall u \in A$, UNA SUCC. $u_n \in A$ T.C. $u_n \to u$ E $\mathcal{L}(u_n) \to \tilde{\mathcal{L}}(u)$ (RECOVERY SEQUENCE)

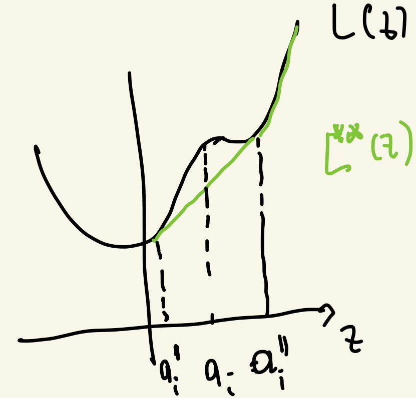
INFATTI $\overline{\mathcal{L}}(u) \leq \liminf_n \mathcal{L}(u_n) = \tilde{\mathcal{L}}(u)$.

SUPP. PER SEMPLICITÀ $L = L(z)$, $\mathcal{L}(u) = \int_I L(u')$,

E SIA $u \in W^{1,p}$ LINEARE A TRATTI, CIOÈ

$$u = a_i x + b_i \quad x \in I_i \subseteq I, \quad \bigcup_i^n I_i = I, \quad 1 \leq i \leq n.$$





SIA $u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{SE } x \in I_i \text{ E } L(a_i) = L^{**}(a_i) \\ a_n(x)\,x + b_n(x) & \text{SE } x \in I_i \text{ E } L(a_i) > L^{**}(a_i) \end{cases}$ E $a_i = \lambda_i a_i' + (1-\lambda_i) a_i''$

$L(a_i') = L^{*}(a_i')$

$L(a_i'') = L^{*}(a_i'')$

DOVE $a_n(x) \in \{a_i', a_i''\}$ $\forall x \in I_i$

$u_n \to u$ UNIFORMEMENTE E $u_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ DEBOLMENTE IN $W^{1,p}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(u_n) = \sum_i \int_{I_i} \lambda_i L(a_i') + (1-\lambda_i) L(a_i'') = \int_I L^{**}(u)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{L}}(u) \leq \liminf_n \mathcal{L}(u_n) = \int_I L^{**}(u) = \tilde{\mathcal{L}}(u).$$

DATA $u \in A$ GENERICA, CONSIDERO $u_n \in A$ LINEARE A TRATTI T.C. $u_n \to u$ IN $W^{1,p}$.

DALL'IPOTESI $c \leq L(z) \leq C(1+|z|^p)$ SI HA $c \leq L^{**}(z) \leq C(1+|z|^p)$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{L}}(u) = \lim_n \tilde{\mathcal{L}}(u_n)$$

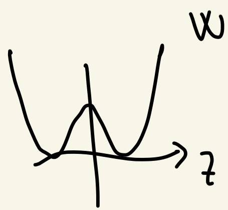
[CONTINUITÀ DI $\tilde{\mathcal{L}}$, NO LAURENTIEV]

$$\Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{L}}(u) = \lim_n \tilde{\mathcal{L}}(u_{\varepsilon_n}) \geq \liminf_n \overline{\mathcal{L}}(u_{\varepsilon_n}) \geq \overline{\mathcal{L}}(u).$$

ES: BOLZA

$$\mathcal{L}(u) = \int_I u^2 + W(u')$$

$$W(z) = (1-|z|^2)^2$$



$$\overline{\mathcal{L}}(u) = \int u^2 + W^{**}(u')$$

$$W^{**}(z) = \begin{cases} W(z) & |z| \geq 1 \\ 0 & |z| \leq 1 \end{cases}$$

ES:

MANIA

$$\mathcal{L}(u) = \begin{cases} \int_0^1 (u^3 - x)^2 |u'|^6 \, dx & u \in C^1 \cap W^{1,1} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{L}}(u) \ngeq \int_0^1 (u^3 - x)^2 |u'|^6 \, dx$$