

# Analisi Matematica A-B

## Prova scritta n.3

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23  
Università di Pisa

11 luglio 2023

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n^3 - a_n + \frac{4}{3} \\ a_1 = \alpha, \end{cases}$$

- (a) Calcolare il limite della successione nel caso  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (b) Per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  la successione risulta essere convergente?

2. (a) Dimostrare che per ogni  $x > 0$  si ha

$$e^{x^2} > \sqrt[4]{1 + 4 \sin^2 x}.$$

(b) Verificare che il seguente integrale improprio risulta essere convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1 + 3x^2)^{2x} - (1 + 2x^2)^{3x}}{e^{x^2} - \sqrt[4]{1 + 4 \sin^2 x}} dx.$$

3. Si consideri l'equazione differenziale:

$$u' = 6(1 - x)\sqrt[3]{u}.$$

- (a) Determinare la soluzione con il dato iniziale  $u(1) = 2\sqrt{2}$  osservando che la soluzione può essere estesa in modo unico a tutto  $\mathbb{R}$ ;
- (b) determinare tutte le soluzioni con il dato iniziale  $u(0) = 0$  e disegnarne i grafici.