Analisi Matematica A e B
Soluzioni Prova scritta n.3

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Università di Pisa

11 luglio 2023

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n^3 - a_n + \frac{4}{3} \\ a_1 = \alpha, \end{cases}$$

   (a) Calcolare il limite della successione nel caso $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

   (b) Per quali $\alpha \geq 0$ la successione risulta essere convergente?

Soluzione. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{4}{3}$ cosicché la relazione di ricorrenza diventa $a_{n+1} = f(a_n)$. Risolvendo l'equazione $f(x) = x$ si trova che i punti fissi sono $x = -2$ e $x = 1$. Inoltre risulta $f(x) \geq x$ per ogni $x \geq -2$ e $f(x) \leq x$ per ogni $x \leq -2$. Studiando la derivata di f si trova che $f(x)$ è crescente per $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e per $x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Posto $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ consideriamo l'intervallo $I = [\beta, 1]$ la funzione f è strettamente crescente su I e dunque se $\beta \leq x \leq 1$ si ha $f(\beta) \leq f(x) \leq f(1) = 1$. Ma $f(\beta) \geq \beta$ in quanto abbiamo già constatato che $f(x) \geq x$ per ogni $x \geq -2$. Dunque I è invariante e se $\alpha = \beta \in I$ ogni termine a_n rimane in I. Essendo $f(x) \geq x$ risulta che $a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$ e dunque a_n è crescente. Dunque a_n ha limite ℓ ed essendo I un intervallo chiuso si ha $\ell \in I$. Infine passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$, essendo f continua, si ottiene $\ell = f(\ell)$ da cui si deduce che ℓ è un punto fisso di f. Ma l'unico punto fisso in I è $\ell = 1$. Abbiamo dunque dimostrato che se $\alpha = \beta$ si ha $a_n \to 1$.

Lo stesso ragionamento appena fatto rimane valido per ogni $\alpha \in [\beta, 1]$: dunque se $\alpha \in [\beta, 1]$ si ha $a_n \to 1$.

Se $\alpha > 1$ possiamo considerare l'intervallo $J = (1, +\infty)$. Anche su J si ha $f(x) \geq x$ e dunque se $x > 1$ risulta $f(x) > x > 1$ e dunque J è invariante. Dunque $a_n \in J$ per ogni n e a_n è crescente. Quindi a_n ha limite ℓ con $\ell \in [\alpha, +\infty)$. Se il limite fosse finito dovrebbe essere un punto fisso di f ma non ci sono punti fissi nell'intervallo $[\alpha, +\infty)$. Dunque, per esclusione, dovrà essere $a_n \to +\infty$.

Consideriamo infinite l'intervallo $[0, \beta)$. Osserviamo che su tale intervallo la funzione f è strettamente decrescente. Si nota che $f(0) = \frac{4}{3} > 1$ mentre $f(\beta) = \frac{4-\sqrt{2}}{3} < 1$.

Per il teorema dei valori intermedi e per la stretta monotonia di f possiamo affermare che esiste un unico $\gamma \in (0, \beta)$ tale che $f(\gamma) = 1$. L'intervallo $[0, \gamma)$ viene mandato in $(1, 4/3)$ dunque se $\alpha \in [0, \gamma)$ si ha $a_1 = \alpha$, $a_2 > 1$ e quindi ci si riconduce al caso già visto in precedenza per cui $a_n \to +\infty$. Se invece $\alpha \in [\gamma, \beta)$ si ha $f(\alpha) \in [\beta, 1] = I$ e ci si riconduce al primo caso, per cui $a_n \to 1$.

Per calcolare γ osserviamo che bisogna risolvere una equazione di terzo grado $f(x) = 1$. Ma abbiamo già una soluzione di tale equazione in quanto sappiamo che $f(1) = 1$. Dunque il polinomio $f(x) - 1$ per il teorema di Ruffini deve essere divisibile per $x - 1$ e svolgendo la divisione ci si riconduce ad un polinomio di secondo grado per il quale abbiamo una formula risolutiva. In definitiva si trova $\gamma = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. □

2. (a) Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha

$$e^{x^2} > \sqrt[4]{1 + 4\sin^2 x}.$$

   (b) Verificare che il seguente integrale improprio risulta essere convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+3x^2)^{2x} - (1+2x^2)^{3x}}{e^{x^2} - \sqrt[4]{1+4\sin^2 x}}\, dx.$$

Soluzione. Per la prima parte osserviamo che essendo e^x una funzione convessa il grafico della funzione sta sopra il grafico della retta tangente, da cui $e^t \geq 1 + t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sostituendo $t = x^2$ si ottiene $e^{x^2} \geq 1 + x^2$. Viceversa la funzione $\sqrt[4]{1+t}$ è concava e dunque sta sotto la retta tangente: $\sqrt[4]{1+t} \leq 1 + \frac{t}{4}$ da cui $\sqrt[4]{1 + 4\sin^2 x} \leq 1 + \sin^2 x$. Ricordiamo inoltre che $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$ da cui si conclude:

$$e^{x^2} \geq 1 + x^2 \geq 1 + \sin^2 x \geq \sqrt[4]{1 + 4\sin^2 x}.$$

Siamo quindi sereni nel sapere che la funzione integranda del punto (b) è definita e continua su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ in quanto il denominatore non si annulla mai. Per dimostrare che l'integrale è convergente basta dunque fare un confronto asintotico per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0^+$ possiamo utilizzare gli sviluppi di Taylor. Sappiamo che per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\
\ln(1+x) &= x + o(x)\\
(1+x)^{\frac{1}{4}} &= 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^2) \\
4\sin^2 x &= 4(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = 4x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) \\
\sqrt[4]{1 + 4\sin^2 x} &= (1 + 4\sin^2 x)^{\frac{1}{4}} = 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{3}{32}16x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x^2 - \frac{11}{6}x^4 + o(x^4) \\
(1 + 3x^2)^{2x} &= e^{2x\ln(1+3x^2)} = e^{2x(3x^2+o(x^3))} \\
&= e^{6x^3}e^{o(x^4)} = e^{6x^3}(1 - o(x^4)) \\
(1 + 2x^2)^{3x} &= e^{3x\ln(1+2x^2)} = e^{3x(2x^2+o(x^3))} \\
&= e^{6x^3}e^{o(x^4)} = e^{6x^3}(1 + o(x^4)).
\end{aligned}
$$

da cui, sempre per $x \to 0^+$:

$$
\begin{aligned}
\frac{(1 + 3x^2)^{2x} - (1 + 2x^2)^{3x}}{e^{x^2} - \sqrt[4]{1 + 4\sin^2 x}} &= \frac{e^{6x^3} \cdot o(x^4)}{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 - x^2 + \frac{11}{6}x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{o(x^4)}{\frac{7}{2}x^4 + o(x^4)} \to 0.
\end{aligned}
$$

Significa che $x = 0$ non è realmente un punto *cattivo* in quanto la funzione si può estendere con continuità in $x = 0$ e dunque l'integrale è certamente convergente in un intorno di 0^+.

Per $x \to +\infty$ per il denominatore si ha

$$
\sqrt[4]{1 + 4\sin^2 x} \leq \sqrt[4]{1 + 4} = \sqrt[4]{5} \ll \frac{1}{2}e^{x^2}
$$

mentre per il numeratore, si può osservare che $\ln(1 + ax^2) \ll \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$ quindi

$$
(1 + ax^2)^{bx} = e^{bx\ln(1+ax^2)} \ll e^{bx\sqrt{x}}.
$$

In definitiva

$$
\left|\frac{(1 + 3x^2)^{2x} - (1 + 2x^2)^{3x}}{e^{x^2} - \sqrt[4]{1 + 4\sin^2 x}}\right| \ll \frac{e^{2x\sqrt{x}} + e^{3x\sqrt{x}}}{e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2}} \leq e^{3x\sqrt{x}-x^2} \ll e^{-\sqrt{x}} \ll \frac{1}{x^2}
$$

ed essendo $\frac{1}{x^2}$ integrabile in un intorno di $+\infty$, per confronto asintotico anche il nostro integrale è assolutamente convergente, quindi convergente, in un intorno di $+\infty$. $\square$

3. Si consideri l'equazione differenziale:

$$
u' = 6(1 - x)\sqrt[3]{u}.
$$

(a) Determinare la soluzione con il dato iniziale $u(1) = 2\sqrt{2}$ osservando che la soluzione può essere estesa in modo unico a tutto $\mathbb{R}$;

(b) determinare tutte le soluzioni con il dato iniziale $u(0) = 0$ e disegnarne i grafici.

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale del primo ordine in forma normale: $u'(x) = f(x, u(x))$. La funzione $f(x, y) = 6(1 - x)\sqrt[3]{y}$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^1 sui due semipiani $y > 0$ e $y < 0$. Invece sull'asse $y = 0$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$ non esiste (tende a $+\infty$). Sappiamo quindi che nei due semipiani c'è esistenza e unicità locale delle soluzioni mentre sulla retta $y = 0$ ci possiamo aspettare non unicità.

L'equazione è a variabili separabili. Osserviamo immediatamente che $u(x) = 0$ è soluzione perché annulla ambo i lati dell'equazione. Se u è una soluzione negli intervalli in cui non si annulla possiamo dividere l'equazione per $\sqrt[3]{u}$ per ottenere:

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} = 6(1 - x).$$

Una primitiva del lato destro è

$$\int 6(1 - x)\, dx \ni 6x - 3x^2.$$

Per il lato sinistro possiamo fare la sostituzione $y = u(x)$, $dy = u'(x)\, dx$ e ottenere

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}}\, dx = \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2(x)}.$$

Su ogni intervallo le due primitive differiscono per una costante dunque in ogni intervallo in cui $u(x) \neq 0$ deve esistere $c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2(x)} = 6x - 3x^2 + c$$

ovvero, ponendo $k = -2c/3$,

$$\sqrt[3]{u^2(x)} = 4x - 2x^2 - k. \tag{1}$$

Ricordiamo che questa equazione è certamente valida solamente quando $u(x) \neq 0$. In particolare se imponiamo la condizione $u(1) = 2\sqrt{2}$ possiamo determinare k:

$$\sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2} = 4 - 2 - k$$

da cui

$$k = 2 - \sqrt[3]{8} = 0.$$

Dunque finché la soluzione rimane positiva deve valere

$$u(x) = \sqrt{(4x - 2x^2)^3} = \sqrt{(2x)^3 \cdot (2 - x)^3}$$

questo accade per $x \in (0, 2)$. Ma quanto $x \to 0^+$ e quando $x \to 2^-$ si ha $u(x) \to 0$ e dunque questa soluzione si può attaccare con continuità alla soluzione stazionaria $u(x) = 0$. La funzione risultante risulta certamente di classe C^1 in quanto entrambe le soluzioni soddisfano la stessa equazione differenziale. Fuori dall'intervallo $(0, 2)$ la soluzione non può che rimanere nulla in quanto guardando l'equazione (o la soluzione generale che abbiamo trovato esplicitamente) si può notare che per $x > 1$ risulta che u è decrescente quando è positiva ed è crescente quando è negativa. Ma allora al crescere di x la soluzione non può che rimanere nulla perché non può diventare positiva senza aumentare e non può diventare negativa senza diminuire. Lo stesso succede, a segni invertiti, per $x < 0$. Dunque per il punto (a) la soluzione è unica ed è definta su tutto $\mathbb{R}$:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ o } x \geq 2 \\ \sqrt{(2x)^3 \cdot (2-x)^3} & \text{se } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Per il punto (b) osserviamo che la soluzione nulla è certamente una soluzione. Ma anche la soluzione trovata nel punto (a) soddisfa la condizione $u(0) = 0$. Ce ne sono poi infinite altre. Infatti negli intervalli in cui $u \neq 0$ deve esistere k per cui vale (1). Visto che $4x - 2x^2 - k$ ha come grafico una parabola rivolta verso il basso con asse $x = 1$ l'intervallo in cui tale funzione non si annulla è simmetrico rispetto ad $x = 1$ ed è un intervallo che si rimpicciolisce all'aumentare di k. Per $k = 0$ si ottiene l'intervallo $(0, 2)$ come visto al punto (a). Per $k < 0$ l'intervallo è più grande e quindi la funzione non può annullarsi in $x = 0$ come richiesto dalla condizione iniziale. Per $k > 0$ l'intervallo si rimpicciolisce fino a sparire quando il discriminante della parabola si annulla, ovvero per $k = 2$. Fuori dall'intervallo determinato dalle radici della parabola possiamo (e dobbiamo) estendere la soluzione a 0. Abbiamo sia soluzioni positive che soluzioni negative. Usando la notazione

$$y^+ = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y < 0. \end{cases}.$$

tutte le soluzioni si scrivono nella forma

$$u(x) = \pm\sqrt{((4x - 2x^2 - k)^+)^3}$$

al variare di $k \in [0, 2]$ ovvero

$$u(x) = \begin{cases} \pm\sqrt{(4x - 2x^2 - k)^3} & \text{se } 1 - \sqrt{1 - \frac{k}{2}} < x < 1 + \sqrt{1 - \frac{k}{2}} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\square$