Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Università di Pisa

5 giugno 2023

1. Dire per quali $\alpha > 0$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} - e^{\cos\frac{1}{n}}}{\log\cos\frac{1}{n^\alpha}}.$$

Soluzione. Posto $x = \frac{1}{n}$ possiamo utilizzare gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$. Sono noti i seguenti sviluppi:

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
\log\cos x^\alpha &= \log\left(1 - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})\right) = -\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{1-x^2}} &= e^{1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)} = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)} \\
&= e \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{2} + o(x^4)\right] \\
&= e \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right]
\end{aligned}$$

mentre

$$
\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} = e\cdot e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} \\
&= e\cdot\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right]+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2}{2}+o(x^4) \\
&= e\cdot\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right].
\end{aligned}
$$

In conclusione se a_n è il termine generico della serie data, si ha, per $n\to+\infty$

$$
a_n = e\cdot\frac{-\frac{1}{8n^4}-\frac{1}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)} \sim e\cdot\frac{-\frac{1}{6n^4}}{-\frac{1}{2n^{2\alpha}}} = \frac{e}{3}\cdot\frac{1}{n^{4-2\alpha}}.
$$

Questo significa che i termini della serie sono definitivamente positivi e, per il criterio di confronto asintotico, la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum\frac{1}{n^p}$ con $p=4-2\alpha$. Notoriamente tale serie converge se e solo se $p>1$ ovvero $\alpha<3/2$. □

2. Dimostrare che per ogni $\alpha>0$ e ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha

$$
\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}.
$$

Proof. Lo possiamo fare per induzione. Chiamiamo I_n il valore dell'integrale. Per $n=0$ si ha

$$
I_0 = \int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}.
$$

Supponiamo ora che per un certo n si abbia $I_n=\frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$. Allora integrando per parti si ha

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{2n+3}e^{-\alpha x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{-2\alpha}\cdot(-2\alpha x)e^{-\alpha x^2}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{-2\alpha}x^{2n+2}e^{-\alpha x^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{2n+2}{-2\alpha}x^{2n+1}e^{-\alpha x^2}\,dx \\
&= 0+\frac{2n+2}{2\alpha}I_n = \frac{2n+2}{2\alpha}\frac{n!}{2\alpha^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2\alpha^{n+2}}
\end{aligned}
$$

come volevamo dimostrare. □

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{cases} u'(x) = (u^2(x)-4)\cdot x^3, \\ u(0)=1. \end{cases}
$$

Tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

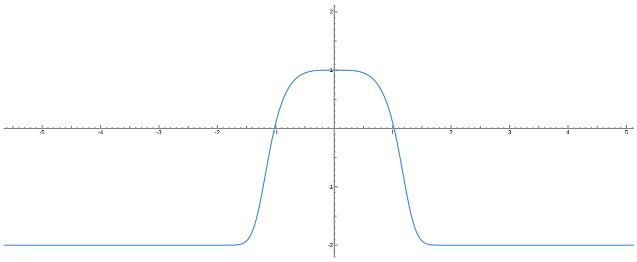

Figure 1: Grafico della soluzione del problema di Cauchy.

Proof. Possiamo tracciare il grafico qualitativo prima ancora di risolvere l'equazione. Osserviamo che le funzioni $u(x) = 2$ e $u(x) = -2$ sono soluzioni (stazionarie) dell'equazione differenziale. L'equazione è della forma $u'(x) = f(x, u(x))$ con $f(x, y) = (y^2-4)x^3$. Essendo f di classe C^1 il teorema di esistenza e unicità locale (Cauchy-Lipschitz) vale nell'intorno di ogni punto del piano (x, y). Significa che la soluzione del problema di Cauchy dato non può toccare le due soluzioni costanti $u = \pm 2$. Per la caratterizzazione delle soluzioni massimali possiamo dedurre che la soluzione massimale del problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$ (è globale). Il fattore $u^2 - 4$ è sempre negativo visto che $-2 < u < 2$ e dunque il segno di u' è uguale al segno di x^3. Dunque la soluzione è strettamente decrescente sull'intervallo $x \geq 0$ e strettamente crescente sull'intervallo $x \leq 0$. Per $x \to \pm\infty$ la soluzione, essendo monotona, ammette limite ℓ. Tale limite dovrà essere minore di 1 (perché la soluzione parte da 1) e non inferiore a -2. Dimostriamo che $\ell = -2$. Se fosse $\ell > -2$ sostituendo $u \to \ell$ nell'equazione avremmo che $u' \to \pm(\ell^2 - 4) \cdot \infty = -\infty$. Ma è noto che se una funzione ha un asintoto orizzontale e la derivata ammette limite allora il limite della derivata deve essere nullo. Si ha quindi un assurdo e dunque $\ell = -2$.

Troviamo ora la soluzione analiticamente. Sapendo che $u^2 - 4$ è sempre diverso da zero possiamo separare le variabili

$$\frac{u'}{u^2 - 4} = x^3$$

e integrare in dt per t che va da 0 a x:

$$\int_0^x \frac{u'(t)}{u^2(t) - 4}\, dt = \int_0^x t^3\, dt$$

con la sostituzione $u = u(t)$, $du = u'(t)dt$ si ottiene

$$\int_{u(0)}^{u(x)} \frac{1}{u^2 - 4}\, du = \frac{x^4}{4}.$$

Utilizzando il metodo dei fratti semplici e ricordando che $-2 < u < 2$ si ottiene

$$\int \frac{1}{u^2 - 4}\, du = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u - 2} - \frac{1}{u + 2} \right) du = \frac{1}{4}(\log(2 - u) - \log(2 + u))$$

da cui

$$\left[\frac{1}{4}\log\frac{2-u}{2+u}\right]_{u(0)}^{u(x)} = \frac{x^4}{4}.$$

Ricordiamo che $u(0) = 1$, dunque otteniamo

$$\log\frac{2-u(x)}{2+u(x)} - \log\frac{1}{3} = x^4$$

ovvero

$$\frac{2-u(x)}{2+u(x)} = \frac{e^{x^4}}{3}$$

da cui

$$6 - 3u(x) = e^{x^4}(2+u(x))$$

e quindi

$$u(x) = \frac{6-2e^{x^4}}{3+e^{x^4}}.$$

□