

# Analisi Matematica A e B

## Prova scritta parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23  
Università di Pisa

22 aprile 2023

1. (i) Dire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  esiste finito l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^3} dx.$$

- (ii) Calcolare l'integrale per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + u' - 42u = 1 + e^{6x}.$$

3. Data l'equazione differenziale

$$u'(x) = \frac{x}{u(x)} \sqrt{1 - u^2(x)} \quad (*)$$

- (i) dimostrare che il problema di Cauchy, relativo a questa equazione, con condizione iniziale  $u(0) = 1$  ammette una ed una sola soluzione data dalla funzione  $u(x) = 1$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Si consideri il problema di Cauchy, relativo a (\*), con condizione iniziale  $u(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Determinare **la soluzione** ed il relativo intervallo massimale di esistenza.
- (iii) (facoltativo) Determinare **le soluzioni** del problema di Cauchy, relativo a (\*), con condizione iniziale  $u(1) = 1$ .