ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 64 - 15.3.2023

Integrali definiti: $\int_a^b f = \left[\int f \right]_a^b$

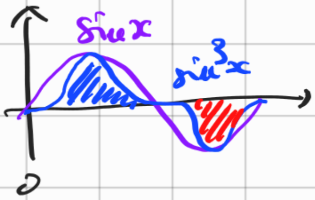
In alcuni casi è possibile determinare $\int_a^b f$ senza dover trovare $\int f$.

Es $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ se f è dispari. $y=-x$

Es $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$ se f è T-periodica

$y = a+x$

Es $\int_0^{2\pi} \sin^3 x\,dx = 0$

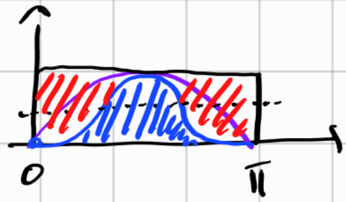


$\| \leftarrow 2\pi$ periodicità

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,dx = 0$

$\uparrow$ dispari

Es $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$



$\|$ — π-periodico

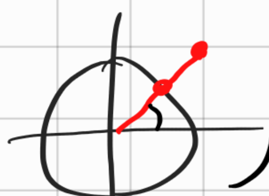
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

ma $\int_0^{\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\pi} 1 = \pi$.

[Nota $\sin x + \cos x \overset{?}{=} \sin(x+\alpha)$

$= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right] = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$]



Scegli opportuni potete vedere come si calcola $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

INTEGRALI IMPROPRI

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f := \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f$.

$f : (a, b] \to \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f := \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f$

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$

con $c \in (a, b)$.

punti "cattivi".

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \neq \boxed{\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f} \; (*)$$

$\leftarrow$ integrale PI (parte principale)

Es $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

problemi con la definizione (*)

- dipende da come gli estremi vanno all'infinito:
$$0 = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \frac{x}{1+x^2}\, dx \overset{?}{\neq} \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a^2} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$
- $$\int_0^{+\infty} f(x) \overset{?}{=} \lim_{a \to +\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x) \overset{?}{=} \lim_{a \to +\infty} \int_{e^{-a}}^{e^a}$$
- non valgono le usuali regole integrazione.

La nostra definizione è il minimo se vogliamo avere l'additività dell'integrale: $\odot \; \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c$

e la continuità $\qquad \odot \; \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f = \int_a^b f$.

Se ad esempio fosse $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = 0$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} = +\infty + (-\infty) = ?$$

Gli integrali impropri soddisfano tutte le proprietà (sensate) degli integrali propri:

- additività rispetto al dominio
- linearità
- formule del cambio di variabile
- integrazione per parti.
- formula fondamentale del calcolo (se estendiamo la notazione)

Notazione

$$\int_a^b f = [F]_a^b$$

$$F' = f.$$

$$[F]_a^b = \lim_{\beta \to b} F(\beta) - \lim_{\alpha \to a} F(\alpha).$$

$$\lim_{\beta \to b} F(\beta) = F(b) \qquad \lim_{\alpha \to a} F(\alpha) = F(a)$$

quando F è definita ed è continua in a o b.

ES:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

$F(x) = 2\sqrt{x}$ è una primitiva di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \neq 0$.

$2\sqrt{0}$ è in realtà $\lim_{\alpha \to 0} F(\alpha)$.

ES

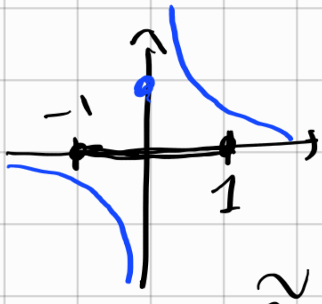
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln x\right]_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty.$$

ES

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln x\right]_0^1 = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

ES $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_0^{+\infty} = (+\infty) - (-\infty) = +\infty.$$

ES ⚠ $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \overset{\text{No}}{\cancel{=}} [\ln|x|]_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0$$



$\frac{1}{x}$ non è definita per $x=0$

se estendo $\tilde f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 7 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\tilde f$ è definita su $[-1,1]$

ma non è localmente limitata e quindi non è localmente R-integrabile.

0 è un punto "CATTIVO" per $\frac{1}{x}$.

Si applica una ulteriore definizione:

Def Sia $f : I \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \to \mathbb{R}$ (punti cattivi) | I intervallo anche illimitato

localmente (limitata e) R-integrabile.

(cioè $\forall a,b$ t.c. $[a,b] \subseteq I \setminus \{x_1 \dots x_n\}$

f è (limitata e) R-integrabile su $[a,b]$).

(ad esempio se f è continua soddisfa questa proprietà).

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$

Allora posto $\underset{x_0}{a} = \inf I$, $\underset{x_{n+1}}{b} = \sup I$, possiamo definire:

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n} \boxed{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f}$$

→ già definito, è un intervallo aperto (x_k, x_{k+1})

se la somma è ben definita

(cioè se non sto sommando infiniti di segno opposto).

ES $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$

$= (-\infty) + (+\infty)$

NON È definito.

Solita osservazione: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ non esiste

ma $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right] = 0.$

Nota

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ se f dispari

$\Uparrow$ è vero se $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ è convergente!

STUDIO DEL CARATTERE DI UN INTEGRALE IMPROPRIO

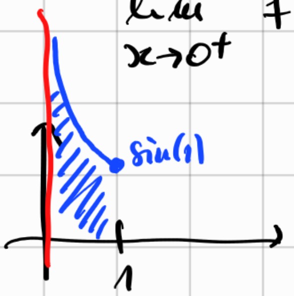
Esempio (già fatto) Possiamo dimostrare che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente anche se non sappiamo scrivere una primitiva tramite "composizione" di funzioni elementari.

⚠ : Sappiamo scrivere una primitiva di e^{-x^2}: $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Esempio Dire se è convergente l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx \qquad f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\sin x}^{1}}{x\cdot\underbrace{\sqrt{x}}_{0}} = +\infty$$



Idea $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x\to 0$

$(0,1]$ ha asintoto $[0,1]$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge. $p=\frac{1}{2}$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}} + \boxed{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

tende a 0 per $x\to 0$

per $x\to 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x - x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}{\sqrt{x^3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x\sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \left(\frac{x\sqrt{x}}{6}+o(x\sqrt{x})\right)$$

MA $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ è converge.

$\int_0^1 -\frac{x\cdot\sqrt{x}}{6}\,dx$ converge banalmente, non è più un integrale improprio

$$\int_0^1 o(x\sqrt{x})\,dx = ?$$

su $(0,1]$

$g=o(x\sqrt{x})$ g è continua perché f era continua $g = f(x)+\frac{x\sqrt{x}}{6}$

ma visto che $g\to 0$ per $x\to 0$

ponendo $g(0)=0$ $g:[0,1]\to\mathbb{R}$

è continua e quindi $\int_0^1 g$

è convergente.