

Analisi Matematica B

Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Università di Pisa

18 febbraio 2023

1. Si consideri la funzione $f: [9, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 9x^2}.$$

- (a) Dimostrare che f è invertibile e chiamata $g: [0, +\infty) \rightarrow [9, +\infty)$ la funzione inversa di f calcolare, se esiste, $g'(0)$.
(b) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = a\sqrt{x^3} + b\sqrt{x} + o(\sqrt{x}), \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

- (c) Calcolare, se esiste, $g''(0)$.

Svolgimento. Possiamo scrivere $f(x) = x\sqrt{x-9}$. Per $x > 9$ la funzione f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \sqrt{x-9} + \frac{x}{2\sqrt{x-9}} > 0$$

Per il criterio di monotonia f , che è continua, è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[9, +\infty)$. Dunque è iniettiva. Visto che $f(9) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la funzione f , essendo continua, assume tutti i valori in $[0, +\infty)$. Dunque $f: [9, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è bigettiva.

Sia g la funzione inversa. Si ha, per definizione di derivata, e facendo il cambio di variabile $y = f(x)$, $x = g(y)$:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(y) - g(0)}{y} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{x - 9}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{x - 9}{x\sqrt{x-9}} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\sqrt{x-9}}{x} = 0. \end{aligned}$$

Similmente possiamo calcolare la derivata seconda ricordando che se $y \neq 0$ allora $g'(y) = 1/f'(g(y))$:

$$\begin{aligned} g''(0) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g'(y) - g'(0)}{y} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\frac{1}{f(x)} - 0}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{1}{x\sqrt{x-9} \cdot (\sqrt{x-9} + \frac{x}{2\sqrt{x-9}})} = \frac{2}{81}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la stima asintotica all'infinito (b) basta osservare che per $x \rightarrow +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ e quindi, usando la formula $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, si trova:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^3 - 9x^2} = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{x}} = \sqrt{x^3} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \sqrt{x^3} - \frac{9}{2}\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

da cui $a = 1$, $b = -\frac{9}{2}$. □

2. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin^3 x \cdot (1 - \cos x).$$

- (a) Determinare l'immagine di f ovvero l'insieme $\{f(x): x \in \mathbb{R}\}$.
- (b) Dimostrare che esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L.$$

Svolgimento. La funzione f è continua quindi, per il teorema dei valori intermedi, l'immagine $f(\mathbb{R})$ è un intervallo. Basterà quindi trovare, se esistono, il massimo e il minimo di f per determinare gli estremi dell'intervallo immagine. Inoltre f è 2π -periodica e dispari, basterà quindi studiarla sull'intervallo $[0, \pi]$. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot (1 - \cos x) + \sin^4 x \\ &= \sin^2 x (3 \cos x - 3 \cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x (3 \cos x - 4 \cos^2 x + 1) \\ &= \sin^2 x (1 - \cos x)(4 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Risulta quindi che $f'(x) \geq 0$ per $x \in [0, \arccos(-1/4)]$ e $f'(x) \leq 0$ per $x \in [\arccos(-1/4), \pi]$. Dunque f ha massimo nel punto $x =$

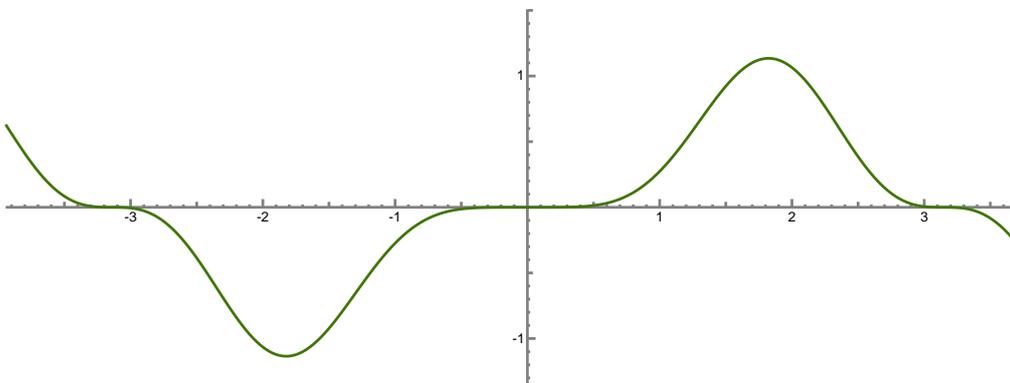


Figure 1: Andamento della funzione f del secondo esercizio.

$\arccos(-1/4)$ e minimo (relativamente all'intervallo $[0, \pi]$) nei punti 0 e π dove la funzione si annulla. L'andamento di f è quello mostrato in figura. Nel punto di massimo si ha $\cos x = -1/4$ e $\sin x = \sqrt{1 - 1/16} = \sqrt{15}/4$. Dunque

$$\begin{aligned} \max f([0, \pi]) &= f(\arccos(-1/4)) = \frac{15\sqrt{15}}{64} \cdot \frac{5}{4} = \frac{75\sqrt{15}}{256} \\ \min f([0, \pi]) &= f(0) = f(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Dalla periodicità di f e dalla simmetria rispetto all'origine, possiamo quindi concludere che l'immagine di f è

$$f(\mathbb{R}) = [-\max f, \max f] = \left[-\frac{75\sqrt{15}}{256}, \frac{75\sqrt{15}}{256} \right].$$

Per la seconda parte si può applicare il teorema di Lagrange. Se $x \neq y$ deve esistere un punto z tale che

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(z)|.$$

La derivata f' è una funzione continua e quindi, per il teorema di Weistrass, è limitata sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Ma f' è periodica come f , quindi f' è limitata su tutto \mathbb{R} cioè esiste $L > 0$ tale che $|f'(z)| \leq L$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Questo conclude la dimostrazione. \square

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - (1+\sin x)^{\sin x}}{x^4}.$$

Svolgimento. Sarà sufficiente sviluppare il numeratore con le formule di Taylor fino all'ordine quattro. Per $x \rightarrow 0$ si ha:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

da cui

$$\begin{aligned} (1+x)^x &= e^{x \ln(1+x)} = e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \right) + \frac{1}{2} (x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} (1+\sin x)^{\sin x} &= 1 + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin^3 x + \frac{5}{6} \sin^4 x + o(\sin^4 x) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 - \frac{1}{2} (x + o(x^2))^3 + \frac{5}{6} (x + o(x))^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Facendo la differenza si ottiene:

$$\frac{(1+x)^x - (1+\sin x)^{\sin x}}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

□