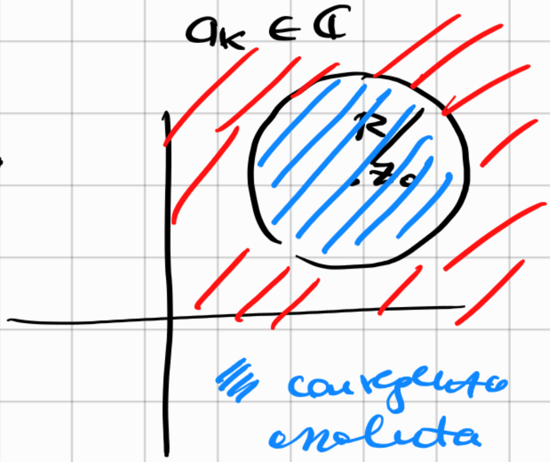
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 49 - 8.2.2023

Serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot (z-z_0)^k \qquad z_0 \in \mathbb{C} \quad a_k \in \mathbb{C}$$

R = raggio di convergenza

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$



convergenza assoluta

non converge

non so

Serie di Taylor

Serie esponenziale

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

polinomio di Taylor

$$f(x) \overset{?}{=} e^x$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$$

$$R = +\infty$$

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt[k]{k!} \to +\infty \\ \sqrt[k]{a_k} \to 0 = \ell \\ R = \frac{1}{\ell} \end{array} \right)$$

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Chi è e^x? È l'unica

$$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \\ f \text{ crescente} \end{cases} \quad f(x) = a^x, \; a = f(1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$$

Teo $f(z+w) = f(z)\cdot f(w)$

dim Fissati $z, w \in \mathbb{C}$

$$f(z+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

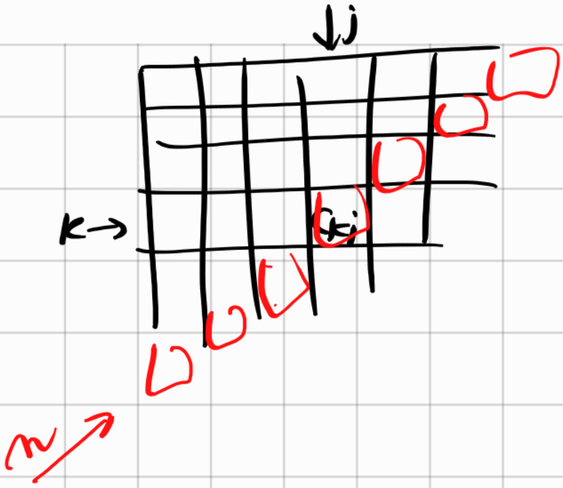
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$c_{k,j} = \underbrace{\frac{z^k}{k!} \, \frac{w^j}{j!}}$$

Somme alla Cauchy (*)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} |c_{k,n-k}|$$



$$\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{k,j}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^j}{j!}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z^k}{k!} \cdot \boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!}} \right) = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right)$$

$$= f(w) \cdot f(z)$$

Per applicare (*)

basta verificare che $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} |c_{k,n-k}| < +\infty$

$$= |\ldots| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(|z|+|w|)^n}{n!}$$

$$= f(|z|+|w|)$$

è convergente. □

Teo $f(x) = e^x$ se $x \in \mathbb{R}$.

dim

1. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ appena visto

2. $f(x)$ è crescente? ←

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{se } x \geq 0$$

è crescente

perché x^k lo è

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)\cdot f(-x)$$

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

$\Rightarrow$ f è crescente anche nelle $x \le 0$.

1 e 2 $\Rightarrow$ $f(x) = a^x$ $\qquad a = f(1)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

la somma è continua | serie di potenze $R=+\infty$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0^k}{(k+1)!} = 1 \Rightarrow a = e \quad \square$$

<u>Sugli Appunti</u> <u>Teo</u> $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

TRE POSSIBILI DEF:

ANZI QUATTRO: $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$ • omomorfismi • $\sum \frac{x^k}{k!}$ • $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

ANZI CINQUE: • $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Abbiamo dimostrato che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

in particolare $\boxed{e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}}$

$$e = \underbrace{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots}$$

Si può usare questa serie per dimostrare che $e \notin \mathbb{Q}$. (vedete sugli appunti)

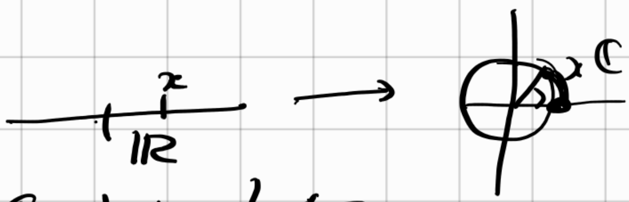
Cosa succede sull'asse immaginario?

$$f(x+iy) = f(x) \cdot f(iy) = e^x \cdot \underbrace{f(iy)}$$

$$f(iy) \overset{?}{=} \underbrace{\cos y + i \operatorname{sen} y}$$

allora avrei $f(z) = e^z$

Pongo $\varphi(x) = f(ix)$



Basta mostrare che:

⓪ • $\varphi : \mathbb{R} \to U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

① • $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

② • φ su $[0, \varepsilon]$ ha valori nel primo quadrante

③ • $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Im} \varphi(x)}{x} = 1$.

(1): $\varphi(x+y) = f(i(x+y)) = f(ix+iy) = f(ix)\cdot f(iy)$
$= \varphi(x)\cdot\varphi(y).$

(0): $|\varphi(x)|^2 = \varphi(x)\cdot\overline{\varphi(x)} = f(ix)\cdot\overline{f(ix)} = (*)$

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\overline{z^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\bar{z}^k}{k!} = f(\bar{z})$$

$(*) = f(ix)\cdot f(\overline{ix}) = f(ix)\cdot f(-ix) = f(ix-ix)$
$= f(0) = 1.$

$\varphi : \mathbb{R} \to U$

(3) $$\varphi(x) = f(ix) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^k x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} i^{2k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + i\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Serie di Taylor di $\cos x$ Serie di Taylor di $\sin x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Im}\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x} = \lim_{x\to 0}\sum(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

continuità $\Vert$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{0^{2k}}{(2k+1)!}$$

$= 1$

(2) Per casa: $\sum(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \geq 0$

se $x \in [0,\varepsilon]$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

(Se un automorfismo è positivo è anche crescente) $\square$

Quindi $\varphi(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$

e $f(z) = e^z$ $\square$

$$\underset{\sum \frac{z^k}{k!}}{f(z)} = \underset{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)}{e^z}$$

Sottoprodotto

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \begin{cases} \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{cases}$$

$$\boxed{e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

FUNZIONI ANALITICHE

Def Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A aperto.
Diciamo che f è analitica se $\forall z_0 \in A$ $\exists a_k \in \mathbb{C}$ t.c.

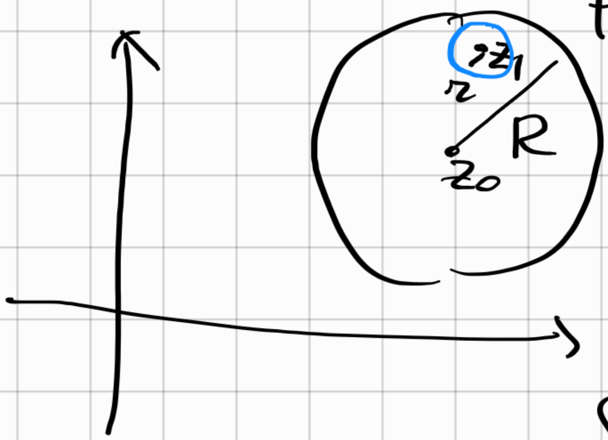
$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

A aperto se $\forall z \in A$ $\exists \rho > 0$ t.c. $B_\rho(z) \subseteq A$

$B_\rho(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \rho\}$

per ogni $z \in B_R(z_0) \subseteq A$, $R > 0$

<u>Teorema</u> (traslazione delle serie di potenze)



$f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$

e

R = raggio di conv.

$|z_1 - z_0| < R$

Se $r < R - |z_1 - z_0|$

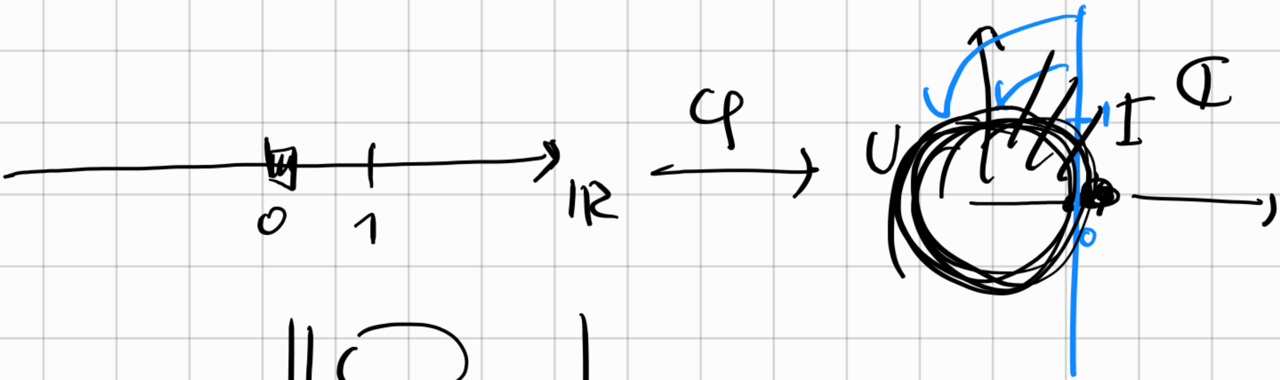
(ovvero $B_r(z_1) \subseteq B_R(z_0)$)

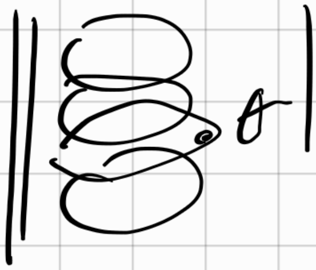
Allora $\exists\, b_k$ t.c.

$$f(z) = \sum b_k (z - z_1)^k$$

$\forall z \in B_r(z_1)$.

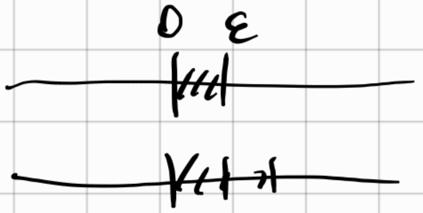
$$\left[\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f(z)\frac{(f(h) - 1)}{h} \to f(z) \right]$$

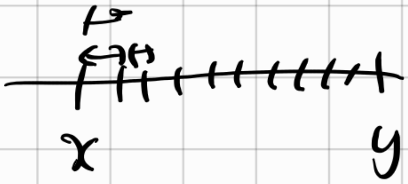




$x < y$

$f(x) < f(y)$





$\varphi([0,\varepsilon]) \subseteq I^\circ$ quadrante

$$\boxed{\mathrm{Re}([0,\varepsilon]) \geq 0} \leftarrow \boxed{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}([0,\varepsilon]) \geq 0} \leftarrow \boxed{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}$$