ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 27 - 23.11.2022

SERIE NUMERICHE

$$\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_n} + a_n + \dots \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Teorema (condizione necessaria per la convergenza)

$$\boxed{\sum a_k \text{ è convergente} \Rightarrow a_k \to 0.}$$

dim

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad S_n \to S \in \mathbb{R}.$$

$$S_{n+1} \to S$$

$$a_n = S_{n+1} - S_n \to S - S = 0 \qquad \square$$

$S \in \mathbb{R}$

ES $\sum (-1)^n$ non è convergente perché non $(-1)^n \to 0$

ES $\sum (1+(-1)^n)$ $\qquad 2+0+2+0+2+\dots = +\infty$

S_n: 2
$2+0=2$
$2+0+2=4$
$2+0+2+0=4$ ....

Teorema (coda) Se $\sum a_n$ è converge allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = 0$$

dim $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad S_n \to S \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

$$= S - S_n \to 0 \qquad \square$$

SERIE A TERMINI POSITIVI

$\sum a_k$ con $\underbrace{a_k \geq 0}$

1. $\sum a_k$ è regolare (converge o diverge)

[$\sum a_k < +\infty \iff \sum a_k$ converge]

Criteri di confronto

a. confronto puntuale: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

allora $\sum a_k \leq \sum b_k$

b. confronto asintotico: $0 < a_k \quad 0 < b_k$

se $a_k \sim b_k$ allora $\sum a_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere.

[$a_k \sim b_k$ se $\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$]

Es

$$\sum_n \frac{n^2+2n+3}{2n^4-n^3+n+1} \quad a_n$$

$a_n = \frac{6}{n^2}$

$\sum \frac{6}{n^2} = 6 \sum \frac{1}{n^2}$

è convergente

$a_n \sim \frac{1}{2n^2} \qquad \sum \frac{1}{2n^2}$ è convergente infatti $\dfrac{a_n}{\frac{1}{2n^2}} = 2n^2 a_n = \dfrac{2n^4 + 4n^3 + 6n^2}{2n^4 - n^3 + n + 1} =$

$= \dfrac{\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}} \cdot \dfrac{2 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}} \to \dfrac{2}{2} = 1.$

---

dim $\quad \dfrac{a_k}{b_k} \to 1 \Rightarrow \dfrac{b_k}{a_k} \to 1.$

- Supponiamo $\sum b_k$ sia convergente.

definitivamente: $\dfrac{a_k}{b_k} \leq 2$ $\quad$ [oppure $\exists M$ $\dfrac{a_k}{b_k} \leq M \ \forall k$]

$a_k \leq 2b_k \quad \forall k > N.$ Se $\sum b_k < +\infty$

anche $\sum 2b_k < +\infty$

per confronto puntuale (definitivo)

anche $\sum a_k < +\infty.$ $\square$

Criterio della radice $\quad$ Sia $a_n \geq 0$. Sia

$$\ell = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

① Se $\ell < 1$ allora $\sum a_n$ è convergente

② Se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$ quindi $\sum a_n = +\infty$

dim ② già fatto

① Se $\ell < 1$ $\exists q : \ell < q < 1$

definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. { infatti se non lo fosse: frequentemente $\sqrt[n]{a_n} > q$.

1
q $\updownarrow \varepsilon$
ℓ

def: $a_n \leq q^n$ $\qquad \sum a_n \leq \sum q^n < +\infty$

serie geometrica $q<1$. $\square$

$\exists\, n_k \quad \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q.$

$\exists\, n_{k_j} \quad \sqrt[n_{k_j}]{a_{n_{k_j}}} \to m \leq l$

$\wedge$
q

assurdo

<u>Es</u> $\quad \sum_k 2^{(\ln k)-k}$

$a_k = 2^{(\ln k)-k}$

$\sqrt[k]{a_k} = (a_k)^{\frac{1}{k}} = 2^{\frac{\ln k}{k}-1} \to \frac{1}{2} < 1.$

$\frac{\ln k}{k} \to 0$

la serie è convergente

<u>Criterio del rapporto</u> Se $a_n > 0$ ed esiste

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(1) se $l < 1$ allora $\sum a_n$ è convergente

(2) se $l > 1$ allora $\sum a_n$ è divergente.

$(a_n \to +\infty)$

<u>dim</u> (metodo rapido: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to l$) $\square$

Oppure si fa il confronto con la serie geometrica

(1) $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1 \qquad \exists\, \underset{l}{\overset{1}{}} q$

<u>def</u> $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \qquad a_{n+1} \leq q\, a_n$

$a_{n+k} \leq q^k a_n$

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n+k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} q^k a_n = \frac{1}{1-q} a_n$

$< +\infty.$

$\square$

Esercizio (serie esponenziale) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\left(\text{vedremo} = e^x\right)$ $\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e\right]$

Con $x > 0$ possiamo applicare il criterio del rapporto:

$$a_k = \frac{x^k}{k!} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{\cancel{k+1}}}{(k+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{x^k}} = \frac{x}{k+1} \to 0$$

dunque $\sum a_k$ converge.

MA questi criteri non sono sempre risolutivi.

Es (Serie armonica)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Vogliamo dimostrare: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

dim:

$$\underbrace{1}_{}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{15}}_{}+\underbrace{\frac{1}{16}+\dots}_{}$$

$$\geq \underbrace{1}_{1}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}_{2}+\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}_{4}+\underbrace{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{15}}_{8}+\underbrace{\frac{1}{31}+\frac{1}{31}+}_{}$$

$$\geq 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} + \frac{16}{31} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$= +\infty$$

Astraendo il procedimento otteniamo il seguente

Criterio [di condensazione di Cauchy]

Sia $a_k \geq 0$, a_k decrescente, allora

la serie $\sum a_k$ ha lo stesso carattere della serie $\sum 2^k \cdot a_{2^k}$.

dim

$$\underbrace{a_0}_{j=0} + \underbrace{a_1}_{j=1} + \underbrace{a_2 + a_3}_{j=2} + \underbrace{a_4 + a_5 + \dots + a_7}_{j=3} + \underbrace{a_8 + \dots + a_{15}} + \dots$$

$$S_{2^n} = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k = a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k}_{2^j \text{ addendi}}$$

$$a_{2^{j+1}} \leq a_k \leq a_{2^j}$$

$$a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j a_{2^{j+1}} \leq S_{2^n} \leq a_0 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \cdot a_{2^j}$$

$$\| $$

$$a_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} a_{2^{j+1}}$$

Se $\sum 2^n a_{2^n} < +\infty \Rightarrow S_{2^n} \leq a_0 + \sum_{j=0}^{+\infty} 2^j a_{2^j} < +\infty$

Se fosse $S_k \to +\infty$

anche $S_{2^n} \to +\infty$

Dunque $S_k = \sum a_k$ è convergente.

Se $\sum 2^n a_{2^n} = +\infty \Rightarrow S_{2^n} \geq a_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} a_{2^{j+1}}$ $\downarrow +\infty$

$S_{2^n} \to +\infty$ ma S_k ha limite

dunque $S_k \to +\infty$

$\square$

Esempio $\boxed{\sum \frac{1}{k^p}}$ (serie armonica generalizzata)

$\left[\begin{array}{l} p=2 : \text{Basilea} \\ p=1 : \text{serie armonica} \end{array}\right]$

$$\sum 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p} = \sum \frac{1}{2^{kp-k}} = \sum \left(\frac{1}{2^{(p-1)}}\right)^k = \sum q^k$$

$$q = \frac{1}{2^{p-1}} = 2^{1-p}$$

Se $p > 1$: $q < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum \frac{1}{k^p}$ converge

Se $p < 1$: $q > 1 \Rightarrow$ la serie $\sum \frac{1}{k^p}$ diverge.

Se $p = 1$ $q = 1 \Rightarrow$ la serie $\sum \frac{1}{k}$ diverge.