ANALISI MATEMATICA B
14.10.2022 - LEZIONE 11

$\mathbb{R}$ gruppo totalmente ordinato, denso, continuo

- Proprietà archimedea: $x>0, y>0 \ \exists n\in\mathbb{N} : n\cdot x > y$.
- Divisibilità: $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}, n\neq 0 \ \exists! y\in\mathbb{R} : ny = x$

(Moltiplicazione per $\mathbb{N}$: $(n\cdot m)\cdot x = n\cdot(m\cdot x)$

$$n\cdot(-x) = -(n\cdot x)$$
$$n(y-z) = ny - nz$$
$$n\cdot x = 0 \Rightarrow (n=0 \vee x=0)$$
)

Dato $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}, n\neq 0$ $\exists! \ \frac{x}{n}$ t.c. $n\cdot\frac{x}{n} = x$.

$$n\cdot\frac{x}{m} = \frac{n\cdot x}{m}$$

<u>Teorema</u> (isomorfismo di gruppi ordinati)

Siano R e S gruppi totalmente ordinati, densi, continui.

$$\begin{bmatrix} \overset{R}{+} & \overset{S}{+} \\ \overset{R}{\leq} & \overset{S}{\leq} \\ e_R & e_S \end{bmatrix}$$

Fissato $u\in R, u>e_R, v\in S, v>e_S$
$\exists! \varphi: R\to S$ t.c.

(i) $\varphi(u) = v$

(omomorfismo) (ii) $\varphi(x \overset{R}{+} y) = \varphi(x) \overset{S}{+} \varphi(y)$ $\forall$

(positività) (iii) $x \overset{R}{\geq} e_R \Rightarrow \varphi(x) \overset{S}{\geq} e_S$ $\forall$

Per semplificare: $\overset{R}{+} = +$ $\quad \overset{S}{+} = +$

$\overset{R}{\leq} \ \leq$ $\quad e_R = 0 \quad e_S = 0$

(2) $x\leq y \iff 0\leq y-x \overset{\text{(iii)}}{\iff} \varphi(y-x)\geq 0 \overset{\text{(ii)}}{\iff} \varphi(y)+\varphi(-x)\geq 0$

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geq 0$$

$\to$ (1) $0 \overset{(0)}{=} \varphi(0) = \varphi(x-x) = \varphi(x)+\varphi(-x) \Rightarrow \varphi(-x)=-\varphi(x)$

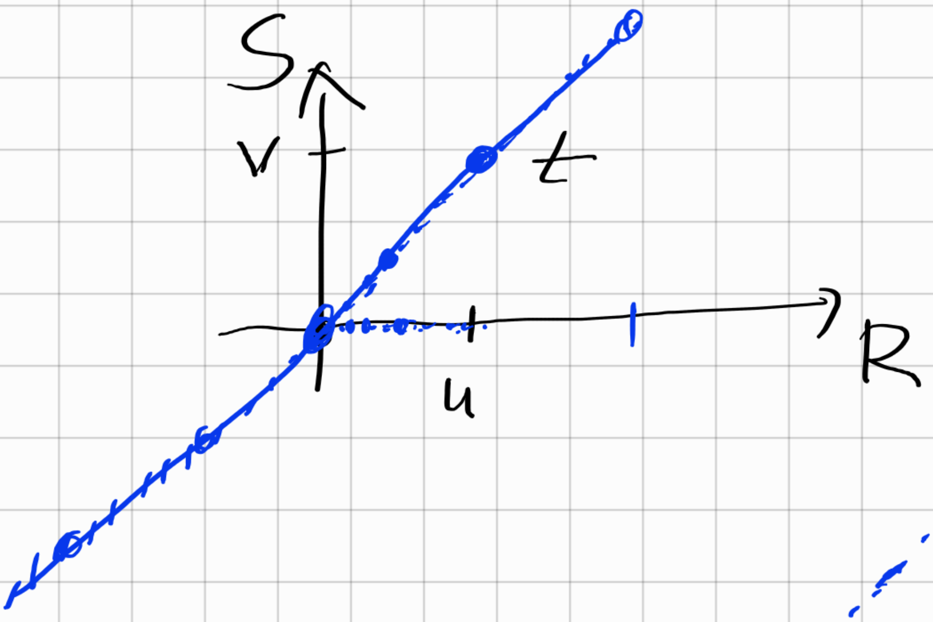
(0) $\varphi(0) = \varphi(0+0) \overset{(ii)}{=} \varphi(0)+\varphi(0) \Rightarrow 0=\varphi(0)$

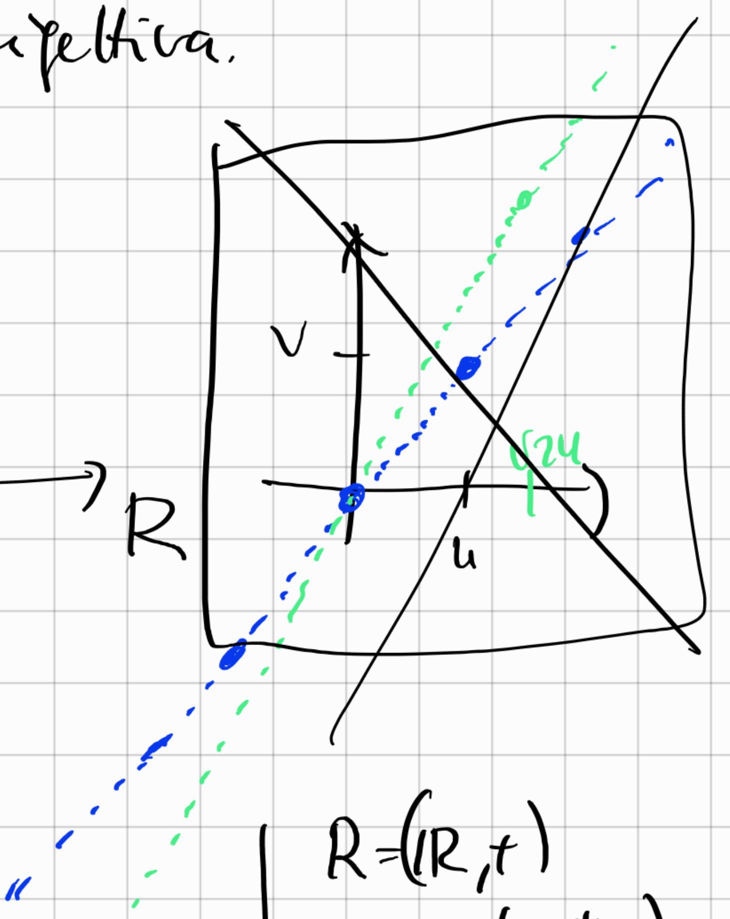
Inoltre (iv) $\varphi(e_R)=e_S$

(v) $\varphi(-x)=-\varphi(x)$

(monotonia) (vi) $x \overset{R}{\leq} y \Rightarrow \varphi(x) \overset{S}{\leq} \varphi(y)$

(vii) φ è biiettiva.





Es $R=S$, $u=1$

$\varphi(x) \doteq \boxed{v \cdot x}$

$R=(\mathbb{R},+)$

$S=(\mathbb{R}^+,\cdot)$

dim $\varphi(u)=v$ $\quad \varphi(2u)=\varphi(u+u)=\varphi(u)+\varphi(u)=v+v=2v$

$n\in\mathbb{N}$

$\varphi(n\cdot u) = n\cdot\varphi(u) = n\cdot v.$ $\qquad \varphi(-x)=-\varphi(x)$

$n\in\mathbb{Z}$

$\varphi\left(\frac{u}{n}\right) \overset{?}{=} \frac{\varphi(u)}{n} = \frac{v}{n}$

$\varphi(n\cdot x) = n\cdot\varphi(x)$

$\varphi(u) = \varphi\left(n\cdot\frac{u}{n}\right) = n\cdot\varphi\left(\frac{u}{n}\right)$ $\varphi\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{\varphi(u)}{n}$

$$\boxed{\varphi\left(n\cdot\frac{u}{m}\right)} = n\,\varphi\left(\frac{u}{m}\right) = n\cdot\frac{\varphi(u)}{m} = \boxed{n\cdot\frac{v}{m}}$$

Se: $n\cdot\frac{u}{m} \le x \le N\cdot\frac{u}{m}$

allora deve: $n\cdot\frac{v}{m} \le \varphi(x) \le N\frac{v}{m}$

x fissato $(x>0)$ $m\in\mathbb{N}$

$n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}$ $N\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}$

$$A = \left\{ \boxed{n\cdot\frac{v}{m}} : \boxed{n\cdot\frac{u}{m}} \le x \right\} \qquad B = \left\{ N\cdot\frac{v}{m} : N\cdot\frac{u}{m} \ge x \right\}$$

$A\neq\emptyset$ $B\neq\emptyset$ ← proprietà archimedea.   oppure $n=0$

Se m abbastanza grande in modo che $\frac{u}{m} < x$. (altrimenti nemmeno piccolo!)

$A \le B$ $\underbrace{\frac{nu}{m}}_{A} \le x \le \underbrace{\frac{Nu}{m}}_{B} \Rightarrow n \le N$

$(v>0)$

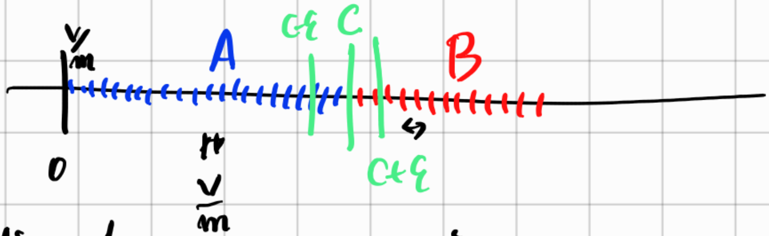
$\frac{nv}{m} \le N\frac{v}{m}$

Continuità in S $(A, B \subseteq S)$

$\Downarrow$

$\exists$ c elemento di separazione: $A \le c \le B$.

Necessariamente $A \le \varphi(x) \le B$.



Voglio dimostrare che c è unico.

Per assurdo sia $c+\varepsilon$ un secondo elemento di separazione

$(\varepsilon>0)$ Se scelgo m così grande in modo che $\frac{v}{m} < \varepsilon$.

(proprietà archimedea!)

$\Rightarrow$ esiste $b\in B$ t.c. $b < c+\varepsilon$ assurdo

$\varphi(x) = c$ è univocamente definito.

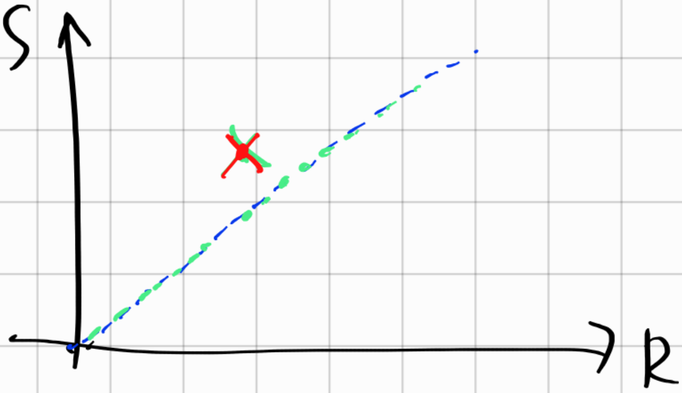
$$\underbrace{\varphi(x+y) \overset{?}{=} \varphi(x) + \varphi(y)}$$

$$n\frac{v}{m} \le \varphi(x) \le \frac{(n+1)v}{m} \qquad (n+n')\frac{v}{m} \le \varphi(x+y) \le \underbrace{(n+n'+1)}\frac{v}{m}$$

$$n'\frac{v}{m} \le \varphi(y) \le (n'+1)\frac{v}{m}$$

$$-\frac{2v}{m} \le (n+n'-(n+1)-(n'+1)) \le \varphi(x+y) - \underbrace{(\varphi(x)+\varphi(y))} \le (n+n'+1-n-n')\frac{v}{m} = \frac{2v}{m}$$

$$\Rightarrow \varphi(x+y) - (\varphi(x)+\varphi(y)) = 0$$



φ è iniettiva $\|$

φ è biiettiva?

$$\exists!\ \varphi : R \to S$$
$$\varphi(u) = v$$

$$\exists!\ \psi : \varphi(R) \to R$$
$$\psi(v) = u$$

$$\psi' : S \to R$$

$\psi = \varphi^{-1}$

$(\mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R})$

non sarebbe surgettiva.

Definiamo la moltiplicazione su $\mathbb{R}$: $1 \in \mathbb{R}$

$\forall m \in \mathbb{R}$ definiamo $m \cdot x = \varphi(x)$
con φ data dal teorema
di isomorfismo
con $u = 1$, $v = m$

$m \cdot (x+y) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = m \cdot x + m \cdot y$

$x \leq y \Rightarrow m \cdot x \leq m y$ (se $m \geq 0$)

$m(x \cdot y) \overset{?}{=} \underbrace{(m \cdot x)} \cdot y$ m, x fissati

$\varphi(y) = m \cdot (x \cdot y)$ φ è un isomorfismo che manda
$1 \mapsto mx$?

$\varphi(1) = m \cdot (x \cdot 1) = m \cdot x$
(φ è omomorfismo positivo).

$\square$

$\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato, continuo ~