ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 10 - 12.10.2022

[$\mathbb{R}$ è un gruppo (additivo) $^{\exists 0 \in \mathbb{R},\, +}$ totalmente ordinato denso e continuo, $\exists\, 1 > 0$.]

Sia R un gruppo additivo. Definiamo $n \cdot x$ $\in R$ $\begin{cases} \text{con } n \in \mathbb{N} \\ x \in R \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ (n+1) \cdot x = nx + x. \end{cases}$$

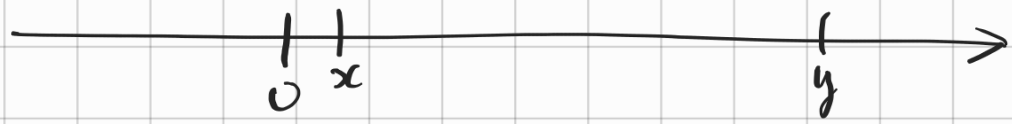
$0 \cdot x = 0$, $1 \cdot x = x$, $2 \cdot x = x + x$, $3 \cdot x = x + x + x$, ...

$(-n) \cdot x = -(n \cdot x)$ $\qquad$ $(-1) \cdot x = -x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $(-2) \cdot x = -(x+x)$

...

Teorema (proprietà archimedea)
Sia R un gruppo totalmente ordinato denso continuo.
Siano $x, y \in R$ $x > 0, y > 0$.
Allora $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \cdot x > y$.



(Non ci sono infiniti e infinitesimi)

[
$x = 0{,}999\ldots$ $\quad 1{,}00\ldots$

$0 < 1 - x < 0{,}0000001$

$1 - x$ è infinitesimo

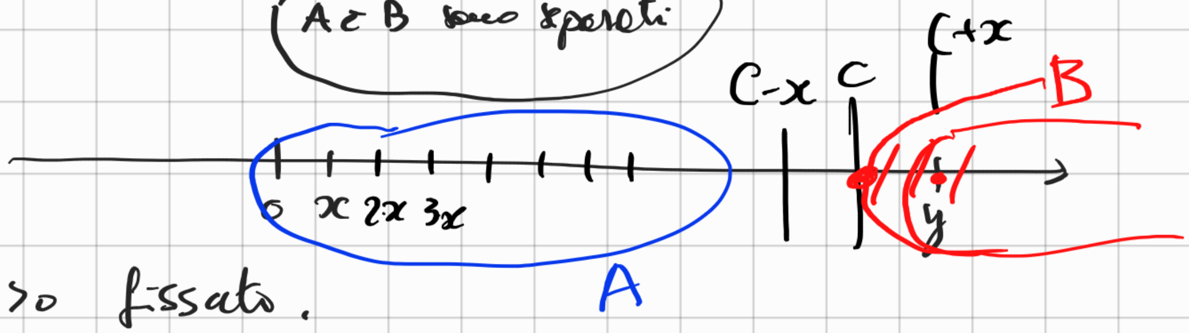
$x = 99999\ldots999$

è infinito
]

$\underline{\text{dim}}$ Ordinamento continuo: Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

Se $A \leq B$ allora $\exists c \in \mathbb{R} : A \leq c \leq B$.

A e B sono separati



$x > 0$ fissato.

$$B = \{ y \in \mathbb{R} : y > 0,\ \underline{\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot x \leq y} \}$$

$$A = \{ n \cdot x : n \in \mathbb{N} \} \qquad A \neq \emptyset$$

Se per assurdo $B \neq \emptyset$ $\exists\, c \in \mathbb{R} : A \leq c \leq B$.

$c - x \notin B$ perché $c - x < c$.

allora $\exists n \in \mathbb{N} : \quad n \cdot x > c - x$

ma allora $(c - x) + x >$

$(n+1)x > c$ visto che

$(n+1)x \in A$ ma $c > A$ assurdo.

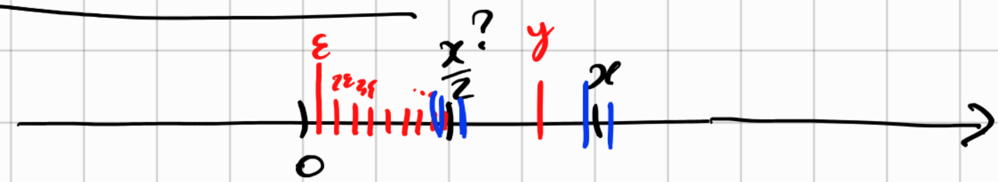
$\square$

Se $1 \in \mathbb{R}$. $\quad n \cdot 1 \cong n \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

Non esiste $y \in \mathbb{R}$ t.c. $y \geq \mathbb{N}$.

<u>Come si definisce $\frac{x}{n}$.</u>

<u>Sia $x > 0$</u>



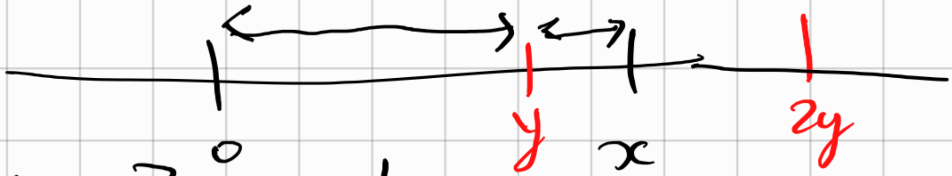
$$2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$$

Per densità $0<x$ $\exists\, y:$ $0<y<x$

Lemma (esistono numeri arbitrariamente piccoli). $\left(0<\varepsilon<\frac{x}{n}\right)$

Dato $x>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists\,\varepsilon>0$ t.c. $n\cdot\varepsilon<x$.

dim



Passo 1 $\forall x>0$ $\exists\, y>0$ t.c. $2y\le x$.

per densità $\exists\, y:$ $0<y<x$

o $2y\le x$.

o $2y>x \Rightarrow 2(x-y)=2x-2y<2x-x=x$.

Passo 2 per induzione $\forall x>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists\, y>0$

t.c. $2^n\cdot y\le x$ $\square$

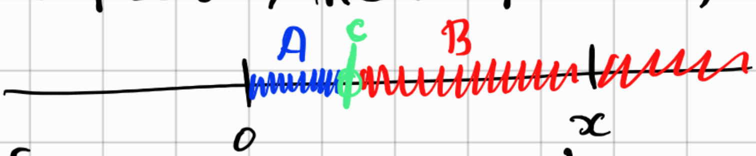
Conclusione $\forall m\in\mathbb{N}$ $\exists\, n\in\mathbb{N}$ t.c. $2^n>m$

$$m\cdot y<2^n y\le x. \qquad \square$$

Teorema (divisibilità) $\mathbb{R}$ come sopra.

$\forall x>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$ $\exists\, y\in\mathbb{R}:$ $ny=x$. [cioè $\frac{x}{n}=y$ è ben definita]

dim $x\in\mathbb{R}$ fissato, $n\in\mathbb{N}$ fissato, $n\neq 0$



$n=3$

$A=\{a\in\mathbb{R}: a>0 : n\cdot a\le x\}$ $\qquad$ $A\neq\emptyset$ per il lemma

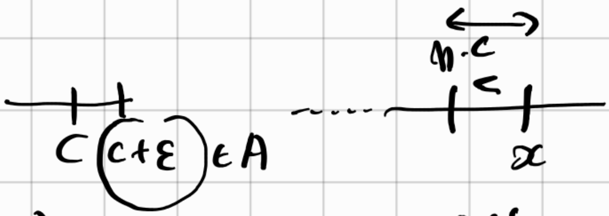
$B=\{b\in\mathbb{R}: b>0 : n\cdot b\ge x\}$ $\qquad$ $x\in B$ $\qquad$ $n\cdot x\ge 1\cdot x=x$.

$\left(A\overset{?}{\le}B \quad \underset{a\quad b}{} \qquad na>nb \text{ assurdo} \Leftarrow a>b\right)$

Dunque esiste $c\in\mathbb{R}:$ $A\le c\le B$

Devo mostrare che: $n\cdot c = x$.

Se fosse $n\cdot c < x$



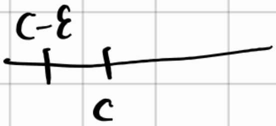
esisterebbe $\varepsilon > 0$ t.c. $n\cdot(c+\varepsilon) < x \Rightarrow c+\varepsilon \in A^{\varepsilon c}$ assurdo

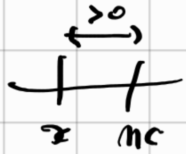
$$n\cdot(c+\varepsilon) = n\cdot c + n\varepsilon < n\cdot c + (x - n\cdot c) = x$$

Mi serve $n\cdot\varepsilon < x - n c$

$x - nc > 0$ quindi ε esiste per il teorema dei numeri piccoli. $\square$

Se fosse $n\cdot c > x$





trovo $\varepsilon > 0$ t.c. $n\cdot(c-\varepsilon) > x$.

$n\varepsilon < nc - x$ .... $\square$

Meditate: Se avessi la moltiplicazione su $\mathbb{R}^+$ (reali positivi) sostituendo $\cdot$ a $+$ ottengo $\sqrt[n]{x}$.