

MODELLO PREDATORIA - PREDATORE

$$\begin{cases} u' = -5u + 3uv \\ v' = 2v - 7uv \end{cases} \quad \text{La cosa importante sono i segni dei coeff.}$$

$$u' = u(-5 + 3v) \quad u = \text{leoni (densità di)}$$

$$v' = v(2 - 7u) \quad v = \text{pecore (densità di)}$$

Problema: cercare i punti stazionari e classificarli

$$\begin{cases} -5u + 3uv = 0 \\ 2v - 7uv = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} u = \frac{2}{7} \\ v = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Studio $(0,0)$ il linearizzato è $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, quindi c'è una

direzione di stabilità e tutto il resto è instabile

Studio $(\frac{2}{7}, \frac{5}{3})$ Pongo $x = u - \frac{2}{7}, y = v - \frac{5}{3}$

$$x' = u' = -5u + 3uv = -5\left(x + \frac{2}{7}\right) + 3\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(y + \frac{5}{3}\right)$$

$$= -5x - \frac{10}{7} + 3xy + 5x + \frac{6}{7}y + \frac{10}{7}$$

$$y' = v' = 2v - 7uv = 2\left(y + \frac{5}{3}\right) - 7\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(y + \frac{5}{3}\right)$$

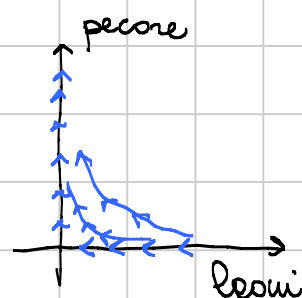
$$= 2y + \frac{10}{3} - 7xy - \frac{35}{3}x - 2y - \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{6}{7}y + 3xy \\ y' = -\frac{35}{3}x - 7xy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{7} \\ -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

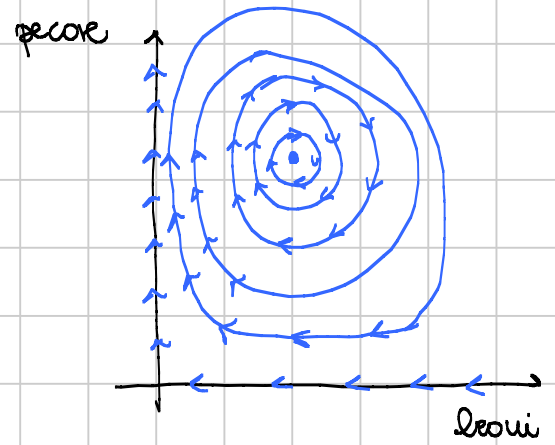
Autovalori $\pm \beta i$ con

$$\beta^2 = \frac{6}{7} \cdot \frac{35}{3} = 10$$



Quindi il teo. di linearizzazione non consente di dire nulla.

Si può verificare che le traiettorie sono curve chiuse che circondano il punto $(\frac{2}{7}, \frac{5}{3})$.



Come si dimostrerebbe?

Metodo energetico: esiste una funzione $E(x,y)$ che è costante lungo le traiettorie e le cui linee di livello sono le curve cercate.

Esercizio $u' = -5u + 3uv - \varepsilon u^2 = u(-5 + 3v - \varepsilon u)$

$$v' = 2v - 7uv - \delta v^2 = v(2 - 7u - \delta v)$$

ε e δ sono il "fastidio" che una specie troppo numerosa dà a se stessa.

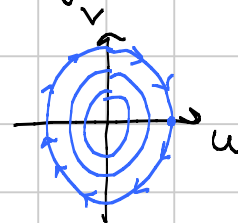
Trovare, per ε e δ abbastanza piccoli, i punti stazionari e classificarli. Si ottiene che ce ne sono 3...

— 0 — 0 —

Equazioni di ordine 2

Esempio classico $u'' = -ku \rightsquigarrow \begin{cases} u' = v \\ v' = -ku \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{k > 0}$

Autovalori $\pm \sqrt{k} i$ e le traiettorie sono circonferenze con centro nell'origine



Metodo energetico: moltiplico l'eq. per u'

$$u'' \cdot u' = -k u u' \quad \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{k}{2} u^2 \right]', \text{ quindi}$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{2} u^2 \right]' = 0, \text{ quindi } \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{2} u^2 = \frac{1}{2} \dot{u}^2(0) + \frac{k}{2} u^2(0)$$

Ponendo $E(t) := \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) + \frac{k}{2} u^2(t)$ si ha che $E(t) = E(0)$ per ogni t .

Le traiettorie sono le linee di livello di E , quindi ellissi.

Esempio 2 $u'' = -ku^3$.

Moltiplico per $\dot{u}$: $\ddot{u} \cdot \dot{u} = -k u^3 \dot{u}$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2\right)' = \left(-\frac{k}{4} u^4\right)'$$

Quindi posto $E(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{4} u^4$ ho che E resta costante lungo le traiettorie

Conseguenza 1 $\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{4} u^4 = E_0 \leftarrow \text{energia iniziale}$

quindi $\dot{u}^2 = 2E_0 - \frac{k}{2} u^4$ $\dot{u} = \pm \sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} u^4}$

Così diventa una eq. del 1° ordine, che volendo si risolve, ma c'è un po' il problema del $\pm$.

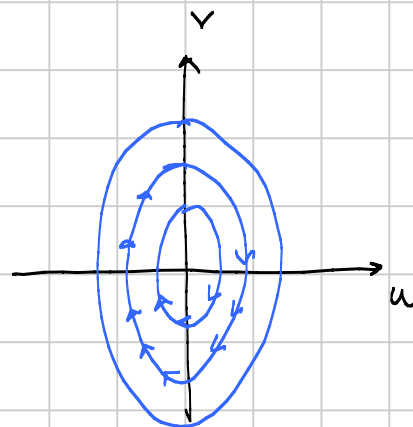
Conseguenza 2 le traiettorie nello spazio delle fasi sono linee di livello di

$$E(u, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{k}{4} u^4$$

Le traiettorie sono comunque curve chiuse intorno all'origine.

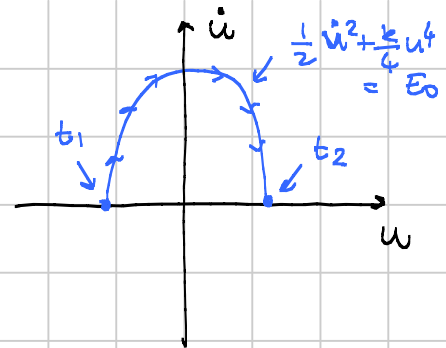
Quindi sono traiettorie periodiche.

Dovrei dimostrare che la traiettoria "completa il giro"...



$$\dot{u}(t) = \sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} u^4(t)}$$

siamo "sopra"



$$\frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{\dots}} = 1 \quad \text{Integro fra } t_1 \text{ e } t_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} u^4(t)}} dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = (t_2 - t_1) = \frac{T}{2}$$

↑ Pongo $x = u(t)$, quindi $dx = \dot{u}(t) dt$

Quando $t = t_1$ ho che $x = u(t_1) = - \left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4}$
 $t = t_2$ ho che $x = u(t_2) = + \left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4}$

$$= \int_{- \left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4}}^{+ \left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4}} \frac{dx}{\sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} x^4}} = \text{integrale improprio che si vede essere convergente (es. analisi 1)}$$

Pongo infine $x = \left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4} y$, quindi $dx = \left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4} dy$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4} dy}{\sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} \frac{4E_0}{k} y^4}} = \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4} dy}{\sqrt{2E_0} \sqrt{1-y^4}} = \left(\frac{4E_0}{k} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2E_0}} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}}_{\substack{\text{indipend.} \\ \text{di } E_0}}$$

$\sim \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \frac{1}{\sqrt[4]{E_0}}$

Più di energia è piccola, più il periodo è lungo.

Oss. 1 Se facessimo il conto del periodo con $u'' = -ku$ otterremmo che il periodo NON dipendeva da E_0 .

Oss. 2 $\ddot{u} = -\sin u$ $\ddot{u} \dot{u} = -\sin u \dot{u}$ $\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = [\cos u]'$

$E(u, v) = \frac{1}{2} v^2 - \cos u$ è costante lungo le traiettorie. Ha un min. glob. in $(0, 0)$ e lì vicino le traiettorie sono curve chiuse.