SSSUP 2013 — LEZIONE 29

Stabilità dell'origine per sistemi lineari: se parto vicino all'origine
- resto vicino all'origine?
- tendo all'origine per $t \to +\infty$?

La risposta dipende dagli autovalori della matrice.

* Se tutti gli autovalori hanno parte reale < 0, allora c'è stabilità
* Se " " " " " " > 0, allora c'è instabilità totale, cioè nessuna soluzione che parte $\neq$ origine tende all'origine
* Se gli autovalori hanno parte reale un po' > 0 e un po' < 0, allora ci sono direzioni in cui le soluz. tendono all'origine, ma altrove scappano
* Se ci sono autovalori con parte reale $= 0$, le cose si complicano.

$\boxed{\text{Metodo energetico}}$ Prendiamo un sistema in forma diagonale

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ v' = \mu v \end{cases}$$

Supponiamo $\lambda < 0$ e $\mu < 0$, quindi tutte le soluzioni tendono a 0.

Considero la funzione $E(t) := u^2(t) + v^2(t)$ (distanza di (u,v) dall'origine al tempo t).

$$E'(t) = 2u(t)u'(t) + 2v(t)v'(t) = 2\lambda u^2(t) + 2\mu v^2(t) \leq 0$$

quindi intanto $E(t) \searrow$. Inoltre

$$E'(t) \leq -2c\,E(t) \qquad \text{dove} \quad c = \min\{|\lambda|, |\mu|\}$$

quindi $E(t)$ è sottosoluzione di $y' = -2cy$, quindi

$$\boxed{E(t) \leq E(0)\,e^{-2ct}}$$

quindi la distanza dall'origine tende a 0 come un esponenziale dipendente dal minimo autovalore (in valore assoluto)

Discorso ribaltato se $\lambda > 0$ e $\mu > 0$.
Non funziona nulla se i segni sono diversi.

Cosa succede se il sistema non è diagonale, ma diagonalizzabile con autovalori tutti negativi (o tutti positivi).

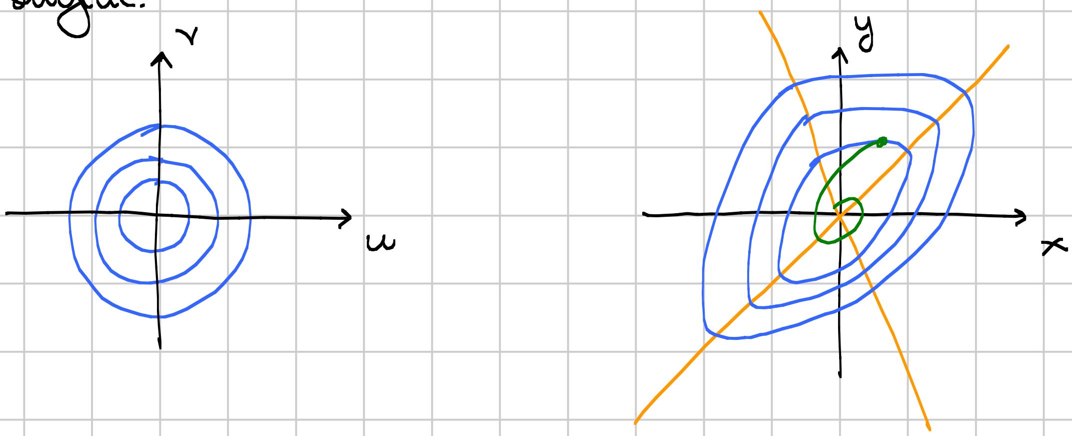
$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) + b\,y(t) \\ y'(t) = c\,x(t) + d\,y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = \alpha\,x(t) + \beta\,y(t) \\ v(t) = \gamma\,x(t) + \delta\,y(t) \end{cases}$$ nelle nuove variabili è diagonale

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = M$ matrice di cambio di base

Quindi $E(t) := \boxed{(\alpha x(t) + \beta y(t))^2 + (\gamma x(t) + \delta y(t))^2}$ decresce esponenzialmente

Forma quadratica definita positiva in $x(t), y(t)$.

Le linee di livello di $E(t)$ nel piano (x,y) sono ellissi con centro nell'origine.



Il fatto che $E(t)$ scende dice che se partiamo in una ellisse, andiamo in ellissi sempre più piccole.

<u>Metodo energetico</u>: trovare una funzione $E(t)$ le cui linee di livello sono curve che si addensano sull'origine e tale che $E(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ (E vale 0 nell'origine).

Cosa succede se il sistema non è lineare?

$$\begin{cases} u' = -2u + u^2 + 5uv \\ v' = -3v - v^2 + u^2 \end{cases}$$

Posso sempre supporre, dato $u' = f(u,v)$, $v' = g(u,v)$ che f e g siano della forma termini lineari + roba di ordine superiore (Taylor). Posso sempre supporre che la parte lineare sia in forma canonica (diagonale se è diagonalizzabile).

$$E(t) = u^2 + v^2 \qquad \begin{aligned} E' &= 2uu' + 2vv' \\ &= -4u^2 + 2u^3 + 10u^2v - 6v^2 - 2v^3 + 2u^2v \\ &= \underbrace{-4u^2 - 6v^2}_{\text{come prima}} + \underbrace{12u^2v + 2u^3 - 2v^3}_{\text{ordine superiore}} \end{aligned}$$

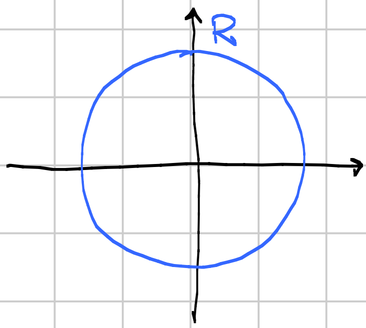
Poniamo $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$. Allora

$$|\text{termine di ordine superiore}| \leq 16\rho^3$$

Invece $\quad -4u^2 - 6v^2 \leq -4u^2 - 4v^2 = -4(u^2+v^2) = -4\rho^2$

Quindi
$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -4E(t) + 16[E(t)]^{3/2} \\ &= E(t)\{-4 + 16[E(t)]^{1/2}\}. \end{aligned}$$

Scelgo un raggio R t.c. $-4 + 16[E(t)]^{1/2} \leq -2$ per ogni punto all'interno del cerchio.



Finché sto nel cerchio ho che $E'(t) \leq -2E(t)$, quindi $E(t)$ scende, quindi la distanza dall'origine scende, ma allora la distanza dall'origine tende a 0.

Tutte le soluzioni che partono vicino all'origine tendono all'origine.

TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE: Le soluzioni di un sistema qualunque, vicino ad un p.to stazionario, si comportano come le soluzioni del sistema linearizzato (considerando solo i termini lineari). Questo è vero solo se tutti gli autovalori del linearizzato hanno parte reale $\neq 0$ (altrimenti entrano in gioco i termini di ordine superiore).

Dim.: metodo energetico se tutti gli autov. hanno Re <0 o tutti hanno Re >0.
Difficile nel caso misto.

Esempio 1: $u'' = -\sin u$ (pendolo)

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin u \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} u' = v \\ v' = -u \end{matrix}} \end{cases} + \text{termini di ordine superiore}$$

Il sistema linearizzato ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con autov. $\pm i$, quindi Re $= 0$, quindi il teo. di linearizzazione non si applica.

Esempio 2: $\begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin u \end{cases}$ Considero il punto $u = \pi$, $v = 0$ che è pure una soluz. stazionaria

Studiamo la stabilità di questa soluzione. Traslo il problema nell'origine ponendo $u = \pi + w$, cioè $w = u - \pi$. Allora

$$\begin{cases} w' = u' = v \\ v' = -\sin u = -\sin(\pi + w) = \sin w \end{cases} \qquad \begin{cases} w' = v \\ v' = \sin w \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} w' = v \\ v' = w \end{matrix}} + \text{termini sup.}$$

Ora il linearizzato ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con autovalori ± 1, quindi il teo. di linearizzazione vale!

Questo dice che anche per il sistema non lineare, c'è una direzione di stabilità e tutto il resto è instabile