SSSUP 2013 — LEZIONE 28

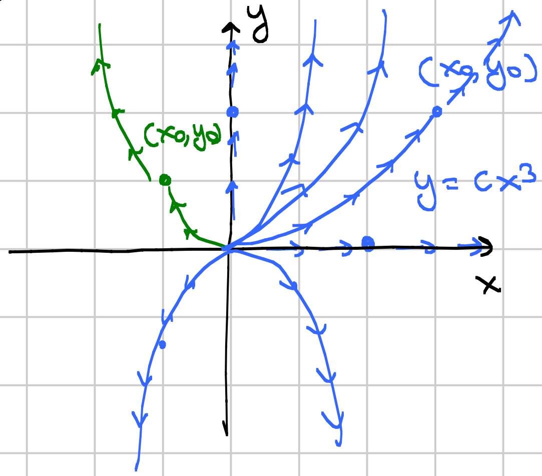
Titolo nota 06/05/2013

$\boxed{\text{Spazio delle fasi per un sistema}}$ Per un sistema di n equazioni (di ordine 1) lo spazio delle fasi è $\mathbb{R}^n$

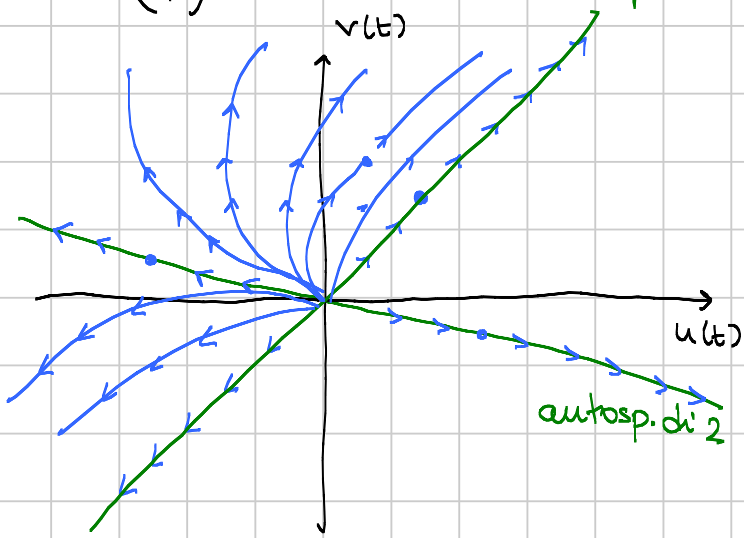
Per un sistema di 2 equazioni si disegna la traiettoria come curva in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(t) &= a e^t = x_0 e^t \\ y(t) &= b e^{3t} = y_0 e^{3t} \end{aligned}$$

Osservo che $y(t) = \text{cost} \cdot [x(t)]^3$



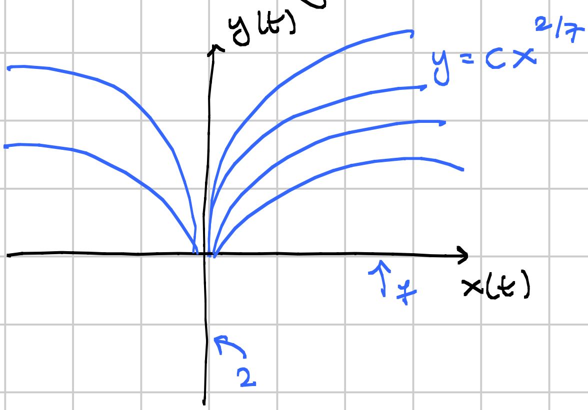
$$\begin{cases} u' = 3u + 4v \\ v' = u + 6v \end{cases} \qquad U(t) = a\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$



Le altre traiettorie si ottengono prendendo quelle del sistema diagonale

$$\begin{cases} x' = 7x \\ y' = 2y \end{cases}$$

e "storcendo gli assi"



$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{7t} \\ y(t) &= y_0 e^{2t} \end{aligned} \qquad y(t) = \text{cost}\, [x(t)]^{2/7}$$

Problema della stabilità

Se $x_0 = y_0 = 0$, la traiettoria è fissa nell'origine (soluzione stazionaria)

Se parto vicino all'origine, cosa succede per tempi grandi?

Negli esempi presentati finora, l'origine è INSTABILE: comunque io parta vicino all'origine, la traiettoria se ne allontana per sempre.

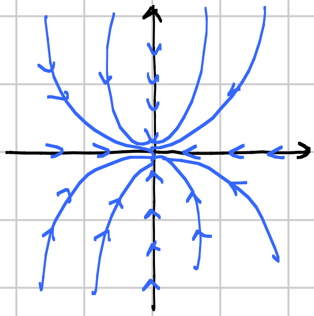
Teoria per i sistemi 2×2 $\qquad U' = A U$

matrice 2×2 di numeri

Supponiamo che la matrice abbia 2 autovalori reali distinti λ e μ.
Allora a meno di cambiare variabili il sistema diventa

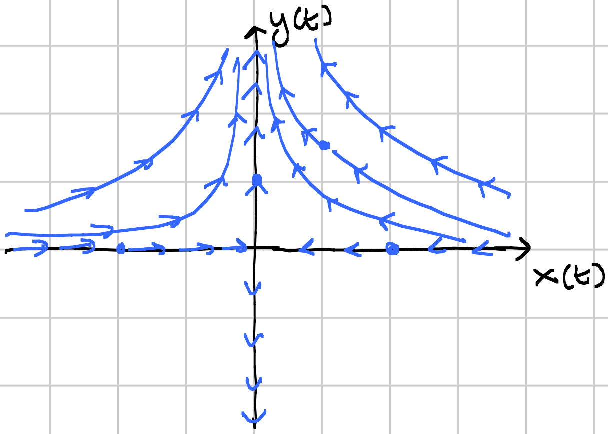
$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\mu t} \end{cases}$$

- Se λ e μ sono < 0, allora l'origine è stabile, cioè tutte le traiettorie tendono all'origine per $t \to +\infty$.
  La forma delle curve dipende dal rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$.



- Se λ e μ sono > 0, allora l'origine è completamente instabile, cioè tutte le traiettorie che non partono da $(0,0)$ divergono per $t \to +\infty$.

- Se $\lambda < 0$ e $\mu > 0$, allora quando t cresce $x(t) \to 0$, $y(t) \to \pm\infty$



$$y(t) = c\,[x(t)]^{\text{espon. neg.}}$$

Quindi le traiettorie che partono sull'autosp. di λ tendono all'origine, tutte le altre divergono.

<u>Esercizio</u> Trattare il caso in cui uno degli autovalori è nullo (le traiettorie sono quasi tutte SEMIrette)

— o — o —

Caso 2 La matrice ha 2 autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$.

<u>Black-box</u>: una matrice del genere cambiando base diventa $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Quindi il sistema diventa
$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$$
$$y'(t) = -\beta x(t) + \alpha y(t)$$

Passo in coordinate polari $x(t) = \rho(t)\cos\theta(t)$ $\quad y(t) = \rho(t)\sin\theta(t)$

$$x' = \rho'\cos\theta - \rho\theta'\sin\theta = \alpha\rho\cos\theta + \beta\rho\sin\theta$$
$$y' = \rho'\sin\theta + \rho\theta'\cos\theta = -\beta\rho\cos\theta + \alpha\rho\sin\theta$$

$1^a \cdot \cos\theta + 2^a \cdot \sin\theta$ $\quad \rho' = \alpha\rho\cos^2\theta + \cancel{\beta\rho\sin\theta\cos\theta} - \cancel{\beta\rho\cos\theta\sin\theta} + \alpha\rho\sin^2\theta$

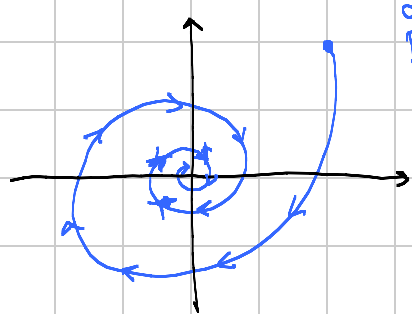
$$\boxed{\rho' = \alpha\rho}$$

$-1^a \cdot \sin\theta + 2^a \cdot \cos\theta$ $\quad \rho\theta' = \cancel{-\alpha\rho\cos\theta\sin\theta} - \beta\rho\sin^2\theta - \beta\rho\cos^2\theta + \cancel{\alpha\rho\cos\theta\sin\theta}$

$$\rho\theta' = -\beta\rho \qquad \boxed{\theta' = -\beta}$$

Nelle variabili $\rho(t)$ e $\theta(t)$ ho il sistema $\begin{cases} \rho' = \alpha\rho \\ \theta' = -\beta \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \theta_0 - \beta t \end{matrix}$

Brutalmente: $\theta(t)$ ruota in senso orario / antiorario a seconda di β
$\rho(t)$ tende a 0 o $+\infty$ a seconda del segno di α



Quindi le traiettorie sono stabili se $\alpha < 0$
e sono instabili se $\alpha > 0$

<u>Esercizio</u> Per $\alpha = 0$...

$\boxed{\text{Caso 3}}$ Autovalori reali coincidenti. Ci sono 2 sottocasi

$\boxed{3.1}$ Diagonalizzabile $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e si tratta come nel caso 1.

$\boxed{3.2}$ Non diagonalizzabile (molt. geom. $= 1$) $\rightsquigarrow$ black-box

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e qui si fanno i conti esplicitamente.