SSSUP 2013 — LEZIONE 027

Titolo nota 06/05/2013

Sistemi di equazioni differenziali

<u>Esempi</u> $\begin{cases} u' = f(u,v,t) \\ v' = g(u,v,t) \end{cases}$

Le incognite sono $u(t)$ e $v(t)$.

Le condiz. iniziali $u(t_0) = u_0$

$v(t_0) = v_0$

$\begin{cases} u' = f(u,v,w,t) \\ v' = g(u,v,w,t) \\ w' = h(u,v,w,t) \end{cases}$

Incognite sono $u(t), v(t), w(t)$

<u>Osservazione</u> Una eq. diff. singola di ordine k si può trasformare in un sistema di k equazioni di ordine 1

<u>Esempio</u> $u'' + u' - u^{20} = 0$

$u' = v$

$v' = -u' + u^{20}$ ($\uparrow u''$)

$\begin{cases} u' = v \\ v' = -v + u^{20} \end{cases}$

sistema di 2 equaz.

$u''' + u'' - u\cos u = t$

$u' = v$

$v' = w$

$w' = u''' = -u'' + u\cos u + t$

$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ w' = -w + u\cos u + t \end{cases}$

<u>Conseguenza</u> Teoremi di esistenza e/o unicità per sistemi di ordine 1 implicano teoremi analoghi per equazioni o sistemi di ordine qualunque.

<u>Esempio</u> Sistema lineare omogeneo di 2 eq. di ordine 1.

$\begin{cases} u' = 3u + 4v \\ v' = u + 6v \end{cases}$

Voglio trovare la soluzione generale, che dovrebbe avere 2 parametri liberi.

$\boxed{\text{1° metodo}}$ Ridursi ad una singola equaz. di ordine 2.

Derivo la 1ª eq: $u'' = 3u' + 4v' = 3u' + 4u + 24v = 3u' + 4u + 6u' - 18u$

prendo v' dalla 2ª

ma ricavo $24v$ dalla 1ª

Ho un'eq. nella sola u: $u'' - 9u' + 14u = 0$

$\rightsquigarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \rightsquigarrow (x-2)(x-7) = 0 \rightsquigarrow x = 2$ e $x = 7$

$$\boxed{u(t) = a e^{2t} + b e^{7t}}$$

$$\boxed{v(t) = -\frac{1}{4} a e^{2t} + b e^{7t}}$$

$$v(t) \overset{\text{dalla 1ª}}{=} \frac{1}{4} u'(t) - \frac{3}{4} u(t)$$

$$= \frac{1}{4}(2a e^{2t} + 7b e^{7t}) - \frac{3}{4}(a e^{2t} + b e^{7t})$$

$$= -\frac{a}{4} e^{2t} + b e^{7t}$$

a e b sono le stesse sopra e sotto.

Esercizio Scriversi un sistema 3×3 e trasformarlo in una singola equazione con il metodo precedente.

$\boxed{\text{Passo avanti}}$ Riscrittura in termini di singola equazione con matrice

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \qquad U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u + 4v \\ u + 6v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema si scrive nella forma $U' = AU$

La soluzione ottenuta prima si può scrivere nella forma

$$U(t) = a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} e^{2t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Sorpresa: 2 e 7 sono gli autovalori della matrice e $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i rispettivi autovettori.

Verifica: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ traccia = 9 Det = 14 $\Rightarrow$ autov = 2, 7

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 3x + 4y = 2x \\ x + 6y = 2y \end{matrix} \qquad x + 4y = 0 \qquad x = -4y$$

ad esempio $(1, -\frac{1}{4})$

e similmente per il 7... Osservazione $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

$$\text{Det} = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 18 - 9\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

è lo stesso polinomio che interviene risolvendo l'eq. di ordine 2 ottenuta.

<u>Motivo per cui funziona</u>: $u(t)$ e $v(t)$ sono le componenti di $U(t)$ rispetto alla base canonica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Poichè la matrice si diagonalizza, esiste una nuova base

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tale che se scrivo $U(t) = x(t) e_1 + y(t) e_2$

allora abbiamo $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 7y \end{cases}$ Sistema diagonale, quindi disaccoppiato

$x(t) = ae^{2t}$, $y(t) = be^{7t}$, quindi $U(t) = ae^{2t} e_1 + be^{7t} e_2$ che è la formula di sopra.

Il passaggio di $(u(t), v(t))$ a $(x(t), y(t))$ avviene mediante la matrice di cambio di base M

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

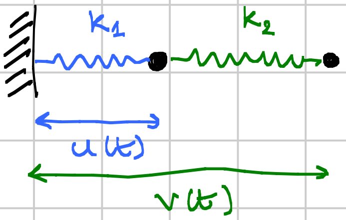
Quando derivo ottengo:

Matrice diagonale D

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \underset{\text{linearità della derivata}}{=} M \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \underset{\text{sistema in }(u,v)}{=} MA \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \underset{\text{cambio di base inverso}}{=} \boxed{MAM^{-1}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Il procedimento appena descritto funziona con qualunque numero di variabili, purchè la matrice A sia diagonalizzabile.

$\boxed{\text{Osservazione 1}}$ Se $u(t)$ e $v(t)$ rappresentano delle variabili "fisiche", è probabile che $x(t)$ e $y(t)$ rappresentino delle variabili fisiche ancora più significative ("intrinseche").



$$\begin{cases} u'' = \dots \\ v'' = \dots \end{cases} \rightsquigarrow$$ sistema di 4 eq. del 1° ordine

$\rightsquigarrow$ nuove variabili (posizione centro di massa, ...)

$\boxed{\text{Osservazione 2}}$ Se abbiamo l' eq. singola $u' = a u$

la soluzione è $u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro}}}{c}\, e^{at}$

Se abbiamo il sistema $U' = A U$ con U vettore e A matrice

la soluzione è

$$U(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore di parametri}}}{C}\, \boxed{e^{At}} \rightarrow \text{e elevato ad una matrice}$$

Come si definisce e^M con M matrice? Intanto è una matrice

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad e^M = Id + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$$

Se M è una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_4 \end{pmatrix}$ ho che

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \; e^{\lambda_4} \end{pmatrix}$$

Oss. L' esponenziale commuta con i cambi di base nel senso che, data una matrice di cambio di base B e posto

$$N = B M B^{-1} \quad \text{abbiamo che}$$
$$N^k = B M^k B^{-1}$$

Quindi $e^{N} = Id + N + \frac{1}{2!} N^2 + \frac{1}{3!} N^3 + \dots$

$$= B\, Id\, B^{-1} + B M B^{-1} + \frac{1}{2!} B M^2 B^{-1} + \dots$$

$$= B \left(Id + M + \frac{1}{2!} M^2 + \dots \right) B^{-1} = B e^{M} B^{-1}$$

Come si calcola l'esponenziale di una matrice M ?

→ Si diagonalizza $\quad BMB^{-1} = D$

→ Si fa l'esponenziale di D che è facile

→ Si torna indietro con il cambio base.

Achtung! $\boxed{\text{Non è vero}}$ che $\quad e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B}$

È vero però se commutano!

Finale $\quad$ Tutte le volte che la matrice è diagonalizzabile, il sistema si può risolvere con questo metodo