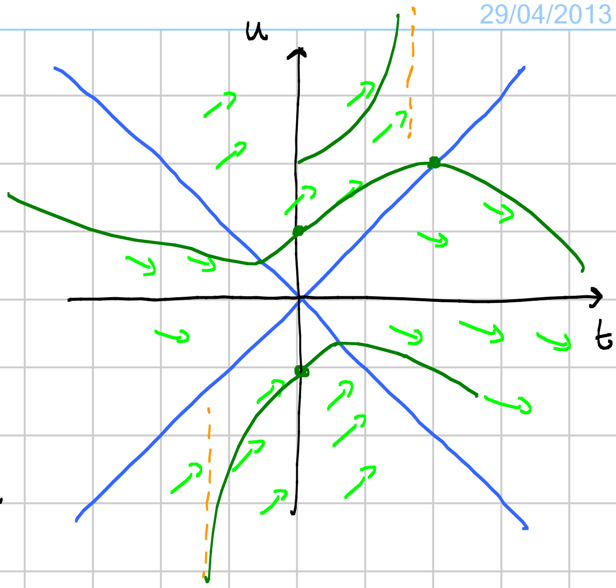
# SSSUP 2013 — LEZIONE 26

Titolo nota 29/04/2013

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$




$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Il segno di $u'$ è come in figura

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ $\alpha < 0$, $t \geq 0$ : sale, tocca, scende

Dopo aver iniziato la discesa non tocca più perché dovrebbe farlo con derivata nulla, cioè passando da sx a dx.

Detto meglio: la retta $v(t) = -t$ è una sottosoluzione in quanto

$$v'(t) = -1 < 0 = [v(t)]^2 - t^2 = f(v(t), t)$$

quindi se sta sotto per un certo $t_0$, sta sotto per tutti i $t \geq t_0$.

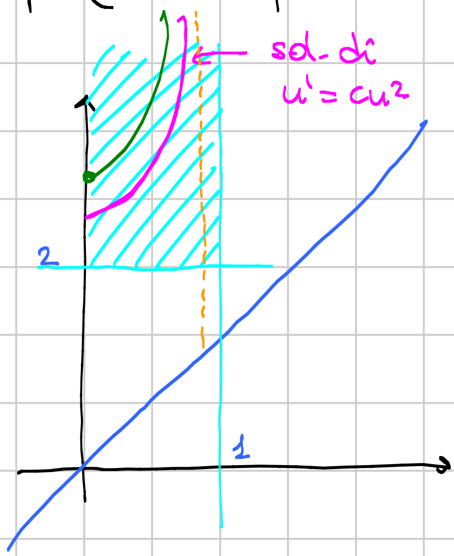
Una volta che sta sopra c'è per forza esistenza globale, nonostante il termine $u^2$.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $\alpha > 0$, $t \geq 0$. Ci sono 3 possibilità

1. Cresce e blow-up
2. Cresce ed esistenza globale crescente
3. Tocca e scende, poi esistenza globale decrescente.

Di sicuro ci sono soluzioni di tipo 3 e se da un certo $\alpha > 0$ parte una soluzione di tipo 3, la stessa cosa accade con gli $\alpha$ precedenti.

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Esistono valori di $\alpha$ per cui c'è blow-up (se c'è per un certo $\alpha$, c'è per tutti i successivi)




Consideriamo la zona $t \in [0,1]$, $u \geq 2$.
In quella zona

$$\underbrace{\boxed{u^2 - t^2}}_{f(t,u)} \geq u^2 - 1 \overset{\text{analisi 1}}{\geq} \underbrace{\boxed{c u^2}}_{g(t,u)}$$

Quindi posso applicare un confronto tra le soluzioni del problema

$u' = u^2 - t^2$ e le soluzioni di $u' = cu^2$

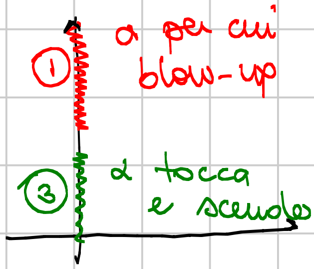
Quindi: finchè stanno nella striscia, le soluzioni del primo problema stanno sopra le soluzioni del secondo, perchè partono sopra,

Ora esistono soluzioni del secondo problema che hanno blow-up prima di uscire dalla striscia (tempo di vita $\to 0$ quando dato $\to +\infty$)
Tutte le soluzioni del 1º problema che stanno sopra devono avere blow-up.

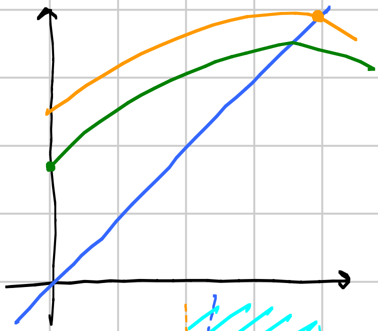
Alternativa per dimostrare l'esistenza di una soluzione con blow-up: esibire una sottosoluzione che ha blow-up, cioè trovare $v(t)$ t.c. $v'(t) \leq v^2(t) - t^2$ e $v(t)$ ha blow-up in tempo finito.

[Provare con: $v(t) = \dfrac{1}{a - bt}$ scegliendo bene a e b]

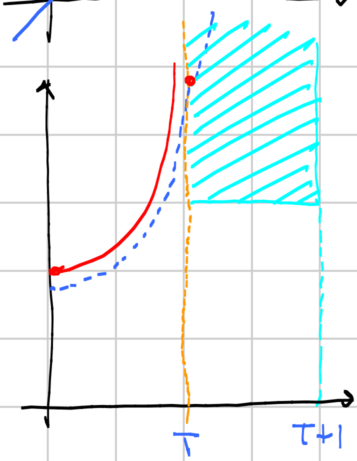
Riassunto: ci sono $\alpha$ di tipo ① e $\alpha$ di tipo ③
Se c'è qualcuno in mezzo, per forza è di tipo ②



**Fatto 5** Le zone ① e ③ sono aperte, cioè il sup del ③ non è di tipo ③ e l'inf. dell'① non è di tipo ①.



Può il sup del ③ essere di tipo ③ ?
NO! Basterebbe partire lungo la bisettrice sopra il p.to di contatto per trovare una soluzione ancora più grande di tipo ③




Può l'inf di ① essere di tipo ① ?
Parto con dato $u(T) = u_0$ e ragionando come prima in una striscia $t \in [T, T+1]$ e $u \geq u_0$ scopro che per $u_0$ grande c'è blow-up

Quindi esiste almeno una soluzione di tipo 2.
Sarà unica ?
Supponiamo che ce ne siano 2 distinte $u(t) > v(t)$. Queste sono crescenti e globali. Poniamo $w(t) := u(t) - v(t)$ e vediamo cosa risolve:

$$
\begin{aligned}
w'(t) = u'(t) - v'(t) &= u^2(t) - \cancel{t^2} - v^2(t) + \cancel{t^2} \\
&= \underbrace{(u(t) + v(t))}_{\geq w(t)} \underbrace{(u(t) - v(t))}_{w(t) > 0} \\
&\geq w^2(t)
\end{aligned}
$$

Quindi $w'(t) \geq w^2(t)$. Tutte le soluzioni di $w' = w^2$ con partenza $> 0$ hanno blow-up, quindi a maggior ragione le soprasoluzioni.
Quindi $w(t)$ avrebbe blow-up, ma questo è assurdo.

**Oss.** I tempi $t \leq 0$ si studiano osservando che se $u(t)$ è soluz., allora anche $v(t) := -u(-t)$ è soluz. (verifica).

Esempio 2 $\quad u' = \tan(tu)$

① $u(t) \equiv 0$ è soluz.

Esercizio: dim. che esiste soluzione definita per ogni $t > 0$.