SSSUP 2013 — LEZIONE 25

Titolo nota 29/04/2013

Studi qualitativi per eq. diff. non autonome

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u - t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Fatto 1 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema ha esistenza globale

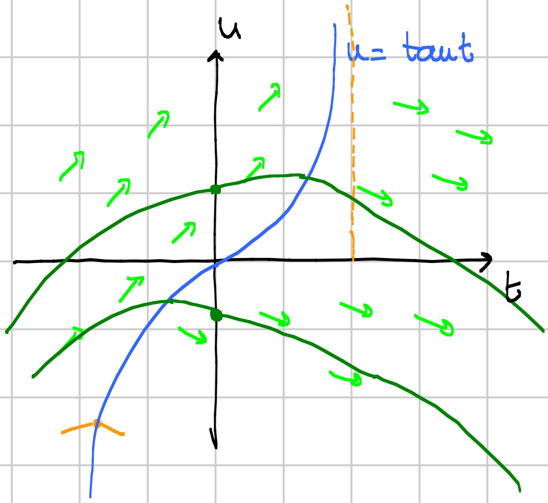
$$|f(t,u)| \leq A(t) \cdot |u| + B(t)$$

$$|\arctan u - t| \leq |\arctan u| + |t| \leq \boxed{\frac{\pi}{2} + |t|}$$

$B(t)$ $\qquad A(t) = 0$

Fatto 2 Segno di u'. Abbiamo che $\arctan u - t \geq 0 \iff t \leq \arctan u$

Vedi figura



Fatto 3 $\alpha < 0$ e $t \geq 0$. La soluzione decresce sempre, quindi per $t \to +\infty$ la soluzione ha un limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Se fosse $l \in \mathbb{R}$, avremmo che

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\boxed{\arctan u(t)}}_{\arctan l} \underbrace{-t}_{-\infty} = -\infty$$

ma per il teo. dell'asintoto il limite, ESISTENDO, dovrebbe essere 0. Quindi l'unica possibilità è $l = -\infty$

Fatto 4 $\alpha < 0$ e $t \leq 0$. Andando indietro, la soluzione ha max relativo dove tocca $u = \tan t$, poi "decresce". Una volta entrata nella "zona sx" la soluzione non può più toccare la curva $u = \tan t$, perché dovrebbe farlo con derivata nulla, cioè passando da sx a dx. Inoltre $\lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty$ per i soliti motivi.

Fatto 5 $\alpha > 0$ e $t \le 0$. Esattamente come fatto 4.

Fatto 6 $\alpha > 0$ e $t \ge 0$. A priori ci sono 2 possibilità:
→ sta sempre sopra $u = \tan t$ ← CONTRO ESISTENZA GLOBALE, perché ci sarebbe blow-up prima di $t = \frac{\pi}{2}$
→ tocca e discende

Quindi tutte "toccano".

Oss. Per dimostrare che esistono sol. che toccano basta partire lungo la curva e andare indietro col tempo.

considerare il pbm di Cauchy con dato iniziale $u(t_0) = u_0$ e $(t_0, u_0) \in$ curva.

Fatto 7 Tutte le soluzioni vanno a $-\infty$ per $t \to +\infty$ e ci vanno come t^2. Infatti

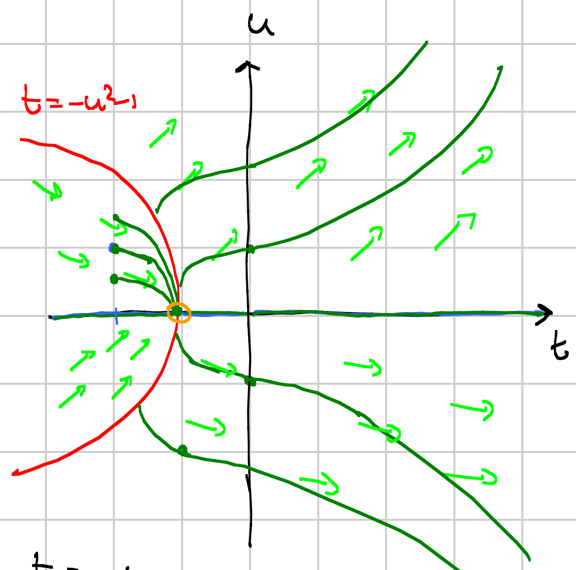
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t^2} \underset{\left[\frac{-\infty}{+\infty}:\ \text{Hôp}\right]}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{2t} = \lim_{t \to +\infty} \boxed{\frac{\arctan u(t)}{2t}} - \frac{t}{2t} = -\frac{1}{2}$$

$\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0\right)$

Quindi a meno di termini di ordine inferiore $u(t) \sim -\frac{1}{2} t^2$ per $t \to +\infty$

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \dfrac{u}{u^2+t+1} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$



Fatto 1 Ci sono problemi se $u^2+t+1 = 0$ cioè se $t = -u^2-1$

Fatto 2 $u(t) \equiv 0$ è una "soluzione", modulo il fatto che "muore" per $t = -1$
Questo sistema $\alpha = 0$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Per $\alpha < 0$ e $t \geq 0$ abbiamo esistenza globale in quanto la soluzione è confinata nel IV quadrante e in quel quadrante

analisi 1.

$$|f(t,u)| = \frac{|u|}{u^2+t+1} \leq \frac{|u|}{u^2+1} \leq \text{costante}$$

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Essendoci esistenza globale abbiamo che $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

"Purtroppo" sia $\ell \in \mathbb{R}$ sia $\ell = -\infty$ sono compatibili con il teo. dell'asintoto... (verifica!)

Brutal mode: se fosse $u(t) \to -\ell \in \mathbb{R}$, avremmo che

$$u'(t) \sim \frac{-\ell}{\ell^2+t+1} \sim \frac{-\ell}{t} \quad \text{per } t \text{ grandi, quindi } u(t) \sim -\ell \log t,$$

ma allora $u(t)$ non tenderebbe ad ℓ...

Rigorosamente: cerchiamo di fare disuguaglianze. Se fosse che

$\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\ell < 0$, allora $u(t) \geq -\ell$ per ogni $t \geq 0$ (perché ci tende decrescendo), quindi

$$|u'(t)| = \frac{|u(t)|}{u^2(t)+t+1} \geq \frac{\alpha}{t+1+\ell^2}, \quad \text{quindi}$$

num. + piccolo
denom. + grande

$$u'(t) = -|u'(t)| \leq -\frac{\alpha}{t+1+\ell^2} \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

Ma allora
$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds$$
$$\leq \alpha - \int_0^t \frac{\alpha}{s+1+\ell^2}\,ds = \alpha - \alpha \log(t+1+\ell^2) + \alpha \log(1+\ell^2) \to -\infty$$

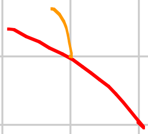
$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Per $\alpha < 0$ e $t \leq 0$ c'è break-down dove incontra la curva $t = -1 - u^2$ (e la incontra per forza).

È facile vedere che esistono valori di α per cui il B-D avviene per tempi $t < -1$ (Basta considerare la soluzione con $u(-1) = -3$)

$\boxed{\text{Variante}}$ Cosa succede alla soluzione che parte con $t = -2$ dentro la parabola?

→ Non può toccare $u = 0$ senza violare l'unicità

→ Non può toccare la parabola per $u > 0$ in quanto "dovrebbe farlo dall'alto" dovendo avere derivata $-\infty$



L'unica possibilità è che abbia break-down per $t = -1$ arrivando a $u = 0$.

$\boxed{\text{FOSSA COMUNE}}$ Tutte le soluzioni che partono all'interno della parabola arrivano nel punto $(-1, 0)$.