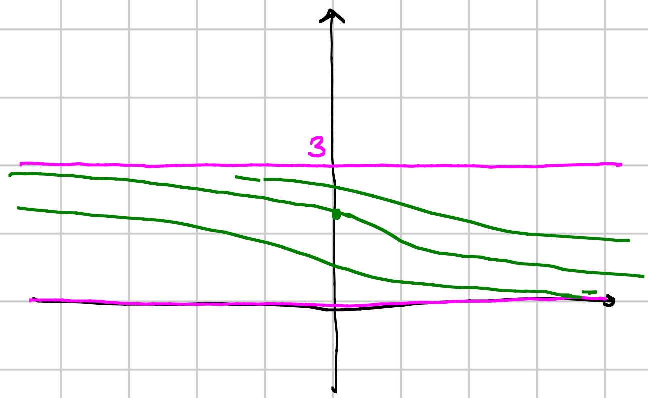
SSSUP 2013 — LEZIONE 24

Titolo nota 23/04/2013

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = u^2 - 3u \\ u(0) = 2 \end{cases}$



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Le soluzioni stazionarie sono $u(t) \equiv 0$ e $u(t) \equiv 3$.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Per unicità, la soluzione con $u(0) = 2$ soddisfa $0 < u(t) < 3$ finché esiste, quindi $u'(t) < 0$ finché esiste. Non possono esserci blow-up o break down, quindi c'è esistenza globale.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Si ha che $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$ e $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 3$.

Dimostriamo quello a $-\infty$.

① Per monotonia esiste $\lim_{t \to -\infty} u(t) = \ell \in [2,3]$

② Dall'equazione ricaviamo che $\lim_{t \to -\infty} u'(t) = \lim_{t \to -\infty} u^2(t) - 3u(t)$
$= \ell^2 - 3\ell$

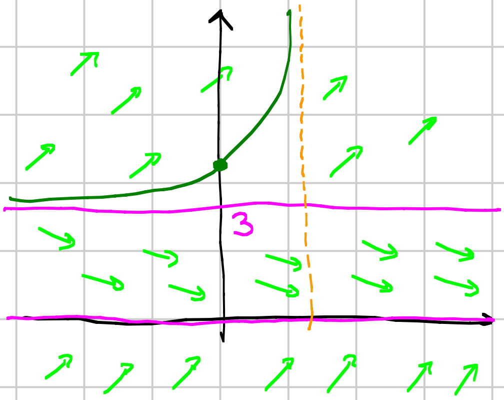
quindi esiste.

③ se il $\lim_{t \to -\infty} u'(t)$ esiste, allora per il teo. dell'asintoto deve essere $= 0$, quindi $\ell^2 - 3\ell = 0$, quindi $\ell = 0$ oppure $\ell = 3$ e l'unico compatibile con ① è $\ell = 3$.

Il discorso a $+\infty$ è analogo.

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Traslando questa soluzione si ottengono tutte le altre con partenza $u_0 \in (0,3)$.

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 - 3u \\ u(0) = 4 \end{cases}$



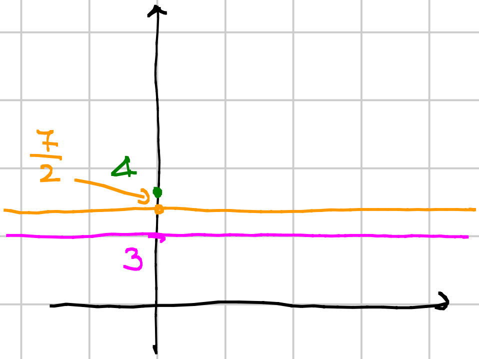
Come prima, si ottiene che $u(t) > 3$ e quindi $u'(t) > 0$ finché esiste.

Per $t \leq 0$ si ha esistenza globale e $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 3$ (solita storia)

Per $t \geq 0$ può esserci esistenza globale o blow-up. In realtà c'è blow-up per colpa del termine u^2.

Rigorosamente bisogna usare un confronto.

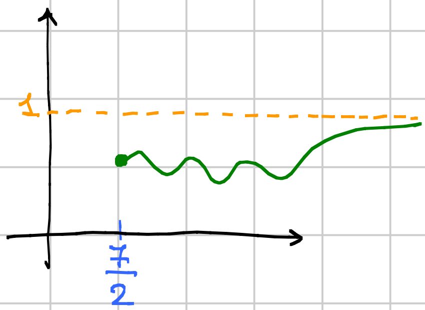
Esiste una costante $c > 0$ tale che



$$u^2 - 3u \geq cu^2 \quad \text{per ogni } u \geq \frac{7}{2}.$$

Questo perché segue facilmente dallo studio della funzione

$$f(u) = \frac{u^2 - 3u}{u^2}$$



(positiva per $u \geq \frac{7}{2}$, tende a 1 per $u \to +\infty$, e questo basta a garantire $\inf = c > 0$)

Posso quindi confrontare i problemi

più grande

$$\begin{cases} u' = \boxed{u^2 - 3u} \\ u(0) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = \boxed{cv^2} \\ v(0) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

più grande

Sappiamo che $v(t)$ ha blow-up in tempo finito e $u(t) > v(t)$, quindi $u(t)$ deve avere blow-up.

Osservazione Quando uso il confronto, basta controllare l'ipotesi $f(t,u) > g(t,u)$ nella zona in cui effettivamente le soluzioni stanno.

Metodo alternativo per dim. il blow-up: sparare a occhio una sottosoluzione che abbia blow-up. Proviamo

$$v(t) = \frac{\frac{7}{2}}{1-\varepsilon t}$$ e vedo se per caso per qualche valore di ε funziona.

Mi serve che $v'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sottosoluz.}}}{\leq} v^2(t) - 3v(t)$ per ogni $t \in [0, \frac{1}{\varepsilon})$ ← finché esiste

$$v'(t) = \frac{7}{2} \frac{+\varepsilon}{(1-\varepsilon t)^{\cancel{2}}} \leq \frac{49}{4} \frac{1}{(1-\varepsilon t)^{\cancel{2}}} - \frac{21}{2} \frac{1}{\cancel{(1-\varepsilon t)}}$$

Moltiplico ancora e ottengo

$$\frac{7}{2}\varepsilon \leq \frac{49}{4} - \frac{21}{2}(1-\varepsilon t)$$. Riorganizzando basta dim.

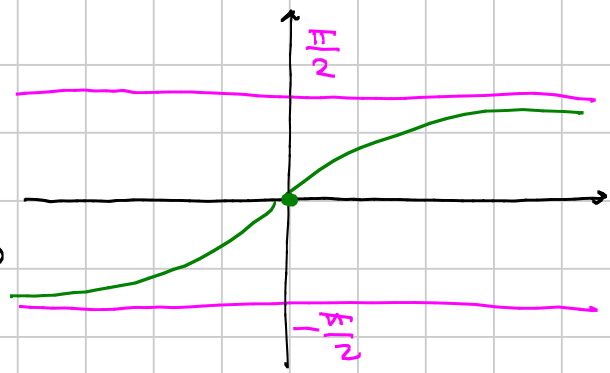
$$\frac{7}{2}\varepsilon + \frac{21}{2}(1-\varepsilon t) \leq \frac{49}{4}$$ D'altra parte

$$\frac{7}{2}\varepsilon + \frac{21}{2}\underbrace{(1-\varepsilon t)}_{\leq 1} \leq \frac{7}{2}\varepsilon + \frac{21}{2} \leq \frac{49}{4}$$ per ε piccolo.

Quindi per ε piccolo ho scritto una sottosoluzione che ha blow-up.

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = \cos u \\ u(0) = 0 \end{cases}$

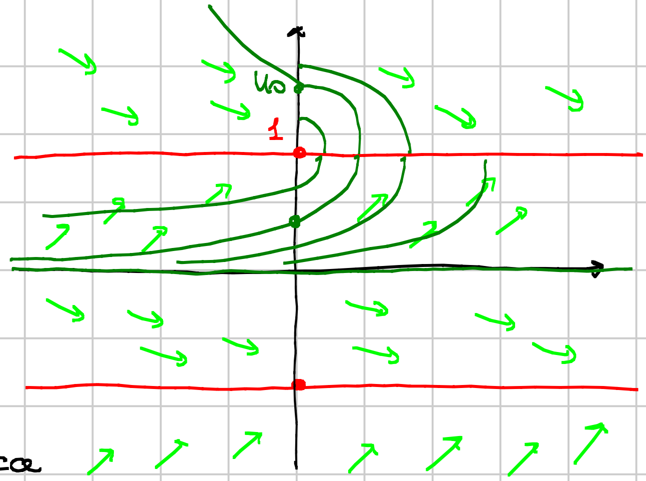


Le soluzioni stazionarie più vicine sono $u(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ e $u(t) \equiv -\frac{\pi}{2}$

C'è esistenza globale perché il RHS è definito ovunque, la soluzione è crescente e i 2 limiti sono...

— o — o —

Esempio 4 $u' = \frac{u^3}{1-u^2}$



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Soluzioni stazionarie: solo $u(t) \equiv 0$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Le rette $u = \pm 1$ sono fuori dalla zona di definizione (chi tocca muore!).

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Il segno di u' è rappresentato in figura

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Se $u(t)$ è una soluzione con $u(0) = u_0 > 0$, allora $v(t) := -u(t)$ è la soluzione con $v(0) = -u_0$.

Verifica: $v'(t) = -u'(t) = -\frac{u^3(t)}{1-u^2(t)} = \frac{[-u(t)]^3}{1-[-u(t)]^2} = \frac{v^3}{1-v^2}$.

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Con partenza $u_0 \in (0,1)$ abbiamo soluzione crescente, con esistenza globale nel passato e break-down nel futuro (se ci fosse esistenza globale, allora $u(t) \to \ell \in [u_0, u_1]$ per $t \to +\infty$, ma allora $u'(t)$ avrebbe limite (reale oppure $+\infty$) ma per il teorema dell'asintoto ...).
In alternativa basta dim. la convessità.

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Con partenza $u_0 > 1$ abbiamo break-down nel futuro per lo stesso motivo di sopra.
Nel passato non può esserci break-down (si allontanano dal rosso) e nemmeno blow-up in quanto la crescita di $\frac{u^3}{1-u^2}$ è lineare ($\sim u$ per u grandi).

Formalmente esiste una costante $c > 0$ tale che
$\left|\frac{u^3}{1-u^2}\right| \le cu$ per ogni $u \ge u_0$ (>1) ← zona in cui la sol. va per $t \le 0$