

Studio qualitativo di equazioni differenziali

Determinare come sono fatte le soluzioni senza saper risolvere.

Strumento 1: TEOREMA DELL'ASINTOTO Sia $u: (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile definita almeno su una semiretta $(A, +\infty)$. Supponiamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

Allora per $u'(t)$ ci sono due possibilità

- ① $u'(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$
- ② $u'(t)$ non ha limite per $t \rightarrow +\infty$, ma in tal caso
 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0$ e $\limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \geq 0$

Esempio $u(t) = \frac{\sin t^2}{t}$. È chiaro che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$, ma

$$u'(t) = \frac{2t \cos t^2 \cdot t - \sin t^2}{t^2} = 2 \cos t^2 - \frac{\sin t^2}{t^2}$$

quindi $\limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 2$ e $\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = -2$.

Dim. Applico Lagrange nell'intervallo $[n, n+1]$. Ottengo che esiste un p.to $c_n \in (n, n+1)$ tale che

$$\boxed{u(n+1)} - \boxed{u(n)} = u'(c_n) \cdot 1$$

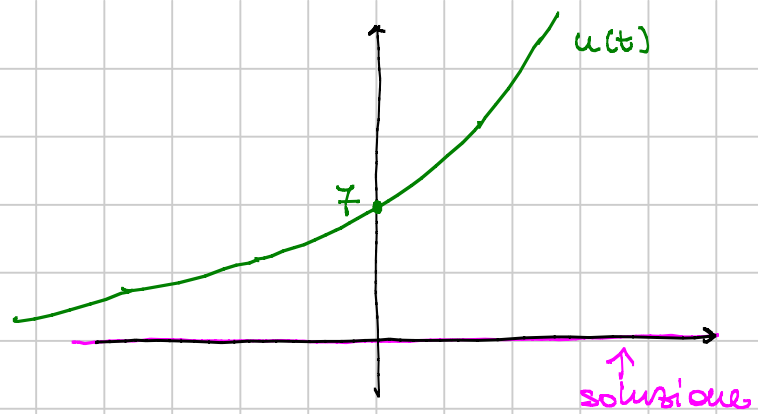
$\downarrow$ $\downarrow$
 l l

Quindi $u'(c_n) \rightarrow 0$ e ovviamente $c_n \rightarrow +\infty$ poiché $n < c_n < n+1$

Quindi $\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \min_{c_n \rightarrow +\infty} \lim u'(c_n) \leq 0$ e analogo per il $\limsup$.

— 0 — 0 —

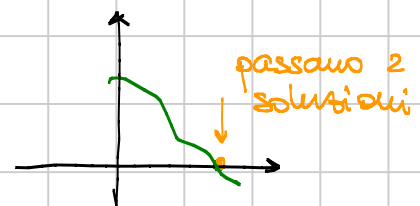
Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 7 \end{cases}$



Fatto 1 Prescindendo dal dato iniziale, una soluzione si vede subito ed è $u(t) \equiv 0$

FATTO GENERALE Un'eq. autonoma $u' = f(u)$ ha tutte le soluzioni stazionarie $u(t) \equiv \alpha$ dove $f(\alpha) = 0$.

FATTO 2 La soluzione che parte da 7 non potrà mai diventare ≤ 0 perché se lo diventasse dovrebbe attraversare la soluzione stazionaria, ma allora per quel punto passerebbero 2 soluzioni il che è contro l'unicità (perché $f(u)$ è derivabile, quindi Lipschitziana localmente)



FATTO GENERALE Quando c'è unicità, tutte le soluzioni conosciute fungono da barriera per le altre, cioè non sono attraversabili.

FATTO 3 Ora sappiamo che $u(t) > 0$ per ogni t per cui esiste, quindi $u'(t) = \arctan u(t) > 0$ finché esiste, quindi $u(t)$ è strettamente crescente.

FATTO 4 Poiché $0 \leq u'(t) \leq \frac{\pi}{2}$ finché esiste, si ha che $u(t)$ non può avere blow-up in un tempo finito: infatti

$$|u(t) - u(0)| = |u'(c)| \cdot |t - 0| \leq \frac{\pi}{2} t$$

Quindi non può avere blow-up, non può avere break-down (perché $f(u)$ è definita ovunque), quindi c'è
ESISTENZA GLOBALE.

FATTO GENERALE Se l'equazione è del tipo $u' = f(t, u)$ con f definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e limitata $|f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$, allora c'è sempre esistenza globale.

FATTO 5 Esendo $u: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ monotona, sappiamo che esistono

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l_1 \in [\tau, +\infty) \cup \{+\infty\}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l_2 \in [0, \tau]$$

Vorremmo dire che $l_1 = +\infty$ e $l_2 = 0$.

Consideriamo l_2 . Dal teorema dell'asintoto (versione a $-\infty$, da fare per esercizio) sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) \begin{cases} \nearrow 0 \text{ è uguale a } 0 \\ \searrow 0 \text{ non esiste} \end{cases}$$

D'altra parte dall'equazione differenziale sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan u(t) = \arctan l_2$$

Quindi il limite esiste, ma allora deve fare 0, cioè $\arctan l_2 = 0$, cioè $l_2 = 0$.

Consideriamo l_1 . Se per assurdo fosse $l_1 \in \mathbb{R}$ potrei applicare il te. dell'asintoto a $t = +\infty$. Dall'equazione avremmo che

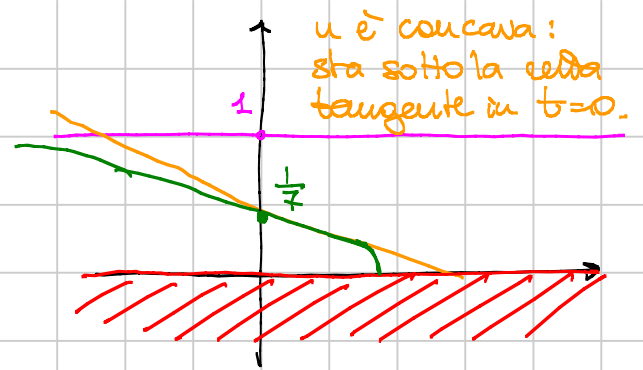
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \arctan l_1$$

quindi esiste, ma allora è 0, ma allora $l_1 = 0$ il che è assurdo in quanto $l_1 \geq \tau$. Ma allora è assurdo che sia $l_1 \in \mathbb{R}$, dunque $l_1 = +\infty$.

FATTO 6 u è convessa in quanto $u''(t) = [u'(t)]' = [\arctan u(t)]' =$
 $= \frac{1}{1 + [u(t)]^2} \cdot \underbrace{u'(t)}_{>0} \geq 0.$

Esempio 2

$$\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = \frac{1}{7} \end{cases}$$



FATTO 1 $u(t) \equiv 1$ è sol. stazionaria, quindi $u(t) < 1$ finché esiste.

FATTO 2 $u(t)$ non può diventare ≤ 0 , pena la perdita di significato. Quindi $0 < u(t) < 1$ finché esiste, ed in particolare $u'(t) = \log u(t) < 0$ finché esiste, quindi $u(t)$ è monotona decrescente finché esiste.

FATTO 3 Consideriamo i $t \leq 0$.

Non può esserci blow-up perché $\frac{1}{7} \leq u(t) \leq 1$ per $t \leq 0$.

Non può esserci break-down per lo stesso motivo.

Quindi c'è esistenza globale per $t \leq 0$.

FATTO 4 Per monotonia sappiamo che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l \in [\frac{1}{7}, 1]$.

Dall'eq. sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \log l, \text{ quindi esiste.}$$

Ma allora il limite è 0, cioè $\log l = 0$, cioè $l = 1$.

FATTO 5 Per $t \geq 0$ non può esserci blow-up in quanto $0 \leq u(t) \leq \frac{1}{7}$.

Può esserci esistenza globale o break-down.

Se ci fosse esistenza globale, avremmo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l_1 \in [0, \frac{1}{7}]$, ma allora... $\log l_1 = 0$ da cui $l_1 = 1$, che è impossibile, quindi c'è break-down.

Detto altrimenti, poiché $0 \leq u(t) \leq \frac{1}{7}$, avremo che $u'(t) \leq \log \frac{1}{7}$ da cui

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \leq u(0) + \underbrace{\log \frac{1}{7}}_{< 0} \cdot t$$

diventa negativo per t grande.