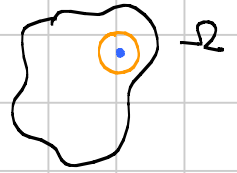


Equazioni differenziali $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (aperto)

$$\underbrace{u' = f(t, u)}_{\substack{\uparrow \text{equazione} \\ \text{PROBLEMA DI CAUCHY}}} \quad \underbrace{u(t_0) = u_0}_{\substack{\uparrow \text{condizione iniziale}}}$$

$(t_0, u_0) \in \Omega$

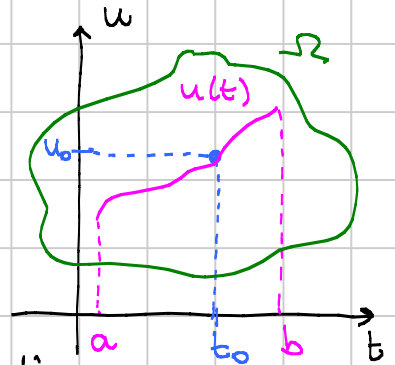


Risolvere un problema di Cauchy vuol dire trovare un intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in (a, b)$ ed una funzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ che sia derivabile e verifichi

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

Questo in particolare sottintende che $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a, b)$

Oss. L'insieme di definizione (a, b) della soluzione fa parte delle incognite del problema.



Oss. Si possono considerare anche equazioni più generali

- del tipo $f(t, u, u') = 0$
- con dipendenza da derivate successive: $f(t, u, u', u'', \dots, u^{(k)})$

Nomenclatura: • l'eq. è in forma normale se è del tipo

$$u' = f(t, u)$$

o più in generale

$$u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

- l'eq. è autonoma se non dipende esplicitamente da t

Oss. FONDAMENTALE Se $u(t)$ è soluzione di una eq. AUTONOMA qualunque, allora tutte traslate $v(t) = u(t+c)$, dove definite, sono soluzioni della stessa equazione. [Dim.: OVVIA]

TEOREMA DI ESISTENZA

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo che f sia continua.

Allora il problema ammette almeno una soluzione.

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ

Consideriamo il problema di Cauchy come sopra. Supponiamo che f sia Lipschitziana nella variabile u uniformemente rispetto a t , cioè esiste $L \geq 0$ tale che

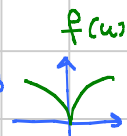
$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1|$$

per ogni $(t, u_1) \in \Omega$ e ogni $(t, u_2) \in \Omega$.

Allora la soluzione (che esiste per il teorema precedente) è pura unica.

Esempio di non unicità

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{eq. diff. autonoma} \quad \text{con } f(u) = 3|u|^{\frac{2}{3}}$$



- Una soluzione è banalmente $u(t) \equiv 0$

- Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$. Infatti $u(0) = 0$ e

$$u'(t) = 3t^2$$

$$f(u(t)) = 3|u(t)|^{\frac{2}{3}} = 3|t^3|^{\frac{2}{3}} = 3t^2$$

Ci sono almeno 2 soluzioni.

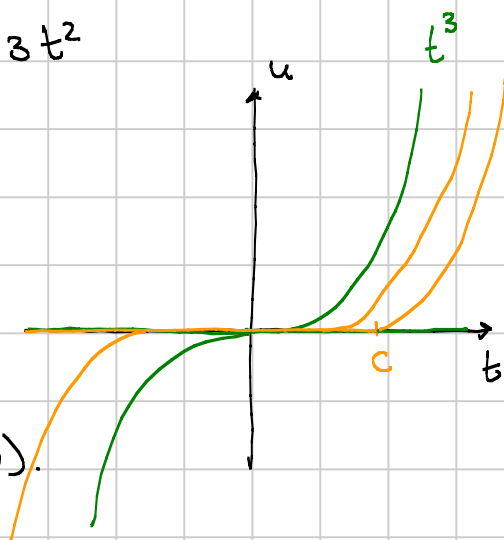
Ce ne sono addirittura infinite! Una è

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ t^3 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

(bisogna verificare che è derivabile pure in $t=0$).

Ma allora ci sono pure tutte le traslate

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{per } t \geq c \end{cases}$$



Abbiamo ottenuto il fenomeno noto come PENNELLO DI PEANO: tutte le volte che ci sono ALMENO 2 soluzioni, allora per ogni punto tra le 2 passa un'ulteriore soluzione!

Oss. Consideriamo il problema
$$\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

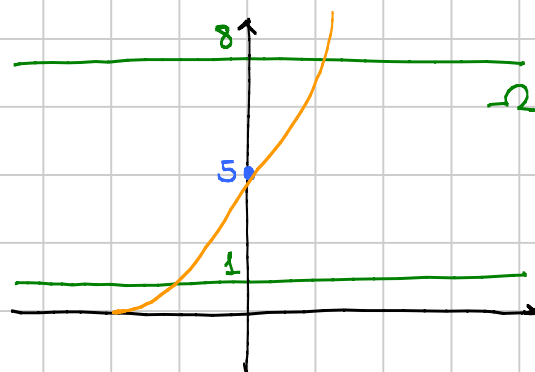
La soluzione è localmente unica, cioè dal punto $(0, 5)$ parte una sola soluzione (unica almeno per valori t vicini a 0). Perché?

Considero la funzione $f(t, u)$ come definita solo per $u \in (1, 8)$.

In questa zona la funzione $3|u|^{2/3}$ è Lipschitziana (basta che siamo lontani da $u=0$),

quindi la soluzione, fin quando resta in Ω , è unica.

La soluzione è la traslata di t^3 che passa per quel punto, cioè $u(t) = (t + \sqrt[3]{5})^3$. Quando arriva a 0 smette di essere unica.



— o — o —

TEOREMA DI ALTERNATIVA

Consideriamo la soluzione di un problema

di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$\uparrow$
 t_0

Dove (cioè per quali t) è definita la soluzione? La soluzione si può estendere nel futuro fino ad un certo istante T , e succede almeno una delle seguenti 3 cose:

① $T = +\infty$ (si dice che il pbm. di Cauchy ha esistenza globale nel futuro)

② $T < +\infty$ e

$\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty$ (si dice che c'è BLOW-UP per $t = T$)

③ $T < +\infty$ e $\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{dist}((t, u(t)), \partial \Omega) = 0$ (si dice che c'è BREAK-DOWN per $t = T$)

$\uparrow$
punto grafico
 $\uparrow$
bordo di Ω

Discorsi del tutto analoghi valgono per $t \leq 0$.

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

La soluzione è $u(t) = 7e^t$ e ha esistenza globale per $t \geq 0$ e $t \leq 0$.

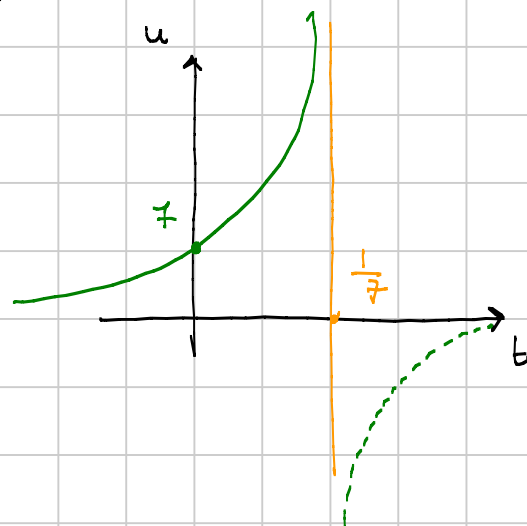
Esempio 2
$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

La soluzione è $u(t) = \frac{1}{\frac{1}{7} - t} = \frac{7}{1-7t}$ (verifica!)

Questa ha BLOW-UP per $t = \frac{1}{7}$.

Nel passato c'è esistenza globale.

Il ramo "giusto" è quello che contiene la condizione iniziale.



Esempio 3
$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2u} \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

La soluzione è $u(t) = \sqrt{49-t}$ (verifica!)

Questa ha esistenza globale nel passato e BREAK-DOWN per $t = 49$.

In questo caso $\Omega = \{u \neq 0\}$ e per $t \rightarrow 49^-$ la soluzione va proprio lì!

