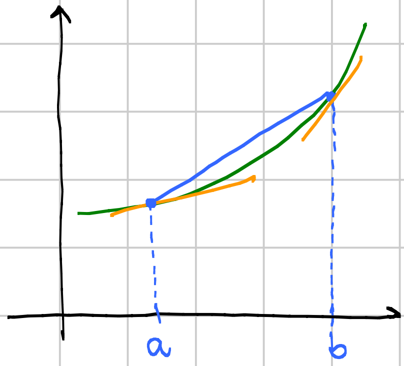
SSSUP 2013 — LEZIONE 20

Titolo nota 08/04/2013

<u>Fatto solito</u>: dati $a < b$ si ha che

$$f'_+(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(b)$$



<u>Fatto importante</u> Supponiamo che $f'_+(x)$ sia continua in un certo punto x_0.
Allora $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ e quindi esiste veramente $f'(x_0)$.

<u>Dim.</u> Per ogni $R > 0$ ho che

$$\underbrace{\boxed{f'_+(x_0-2R)}}_{\downarrow} \underset{\uparrow \text{ fatto di sopra}}{\leq} f'_-(x_0-R) \underset{\uparrow \text{ monotonia } f'_-}{\leq} f'_-(x_0) \underset{\uparrow \text{ ovvia}}{\leq} \underbrace{\boxed{f'_+(x_0)}}_{\downarrow \text{ per } R \to 0}$$

$f'_+(x_0)$ perché ho assunto che f'_+ sia continua in x_0 $\qquad$ $f'_+(x_0)$

A questo punto $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ e fine.

<u>Esercizio</u> Dimostrare l'analogo assumendo $f'_-(x)$ continua in x_0.

$\boxed{\text{BLACK BOX}}$ Data una funzione monotona (debolmente), l'insieme dei punti in cui NON è continua è NUMERABILE, cioè si può scrivere come $\{x_1, x_2, \dots\}$, cioè come immagine di una successione.

<u>Teorema</u> Una funzione convessa è derivabile ovunque tranne al più un insieme numerabile di punti.

Oss. $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ sono quantità finite per ogni $x \in \mathrm{Int}(A)$.
Da questo segue la continuità, allo stesso modo in cui segue dalla derivabilità standard.

— o — o —

Achtung! Per una funzione derivabile due volte si ha che

$$f \text{ convessa in } A \iff f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in A$$

$\boxed{\text{MA}}$ f strett. conv. in A $\Leftarrow$ $f''(x) > 0$ per ogni $x \in A$

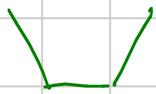
$\not\Rightarrow$ (solito esempio $f(x) = x^4$)

Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$ e $f''(x)$ non si annulla in un intero sottointervallo, allora f è strett. convessa.

— o — o —

Fatti sparsi:

① Una funzione convessa può avere ∞ p.ti di min.



② Una funzione strett. conv. ne ha al più uno (se ne avesse 2, allora nel p.to medio dovrebbe valere ancora meno).
Non è obbligata ad avere p.ti di minimo ($f(x) = e^x$)

③ Una funzione convessa in un intervallo $\underbrace{[a,b]}_{\text{con estremi}}$ ha sempre max

(le funzioni convesse sono comunque sempre semicont. sup.).
Se la funzione non è costante, il max è per forza solo al bordo.
[Si può vedere con lo stare sopra la retta tangente destra]

④ L'eq. $f(x) = 0$ con f convessa può avere 0 soluzioni, 1 soluz, 2 soluzioni o un intero intervallo di soluzioni. Se è strett. convessa ne ha solo 0, 1, 2 (se ne ha 3 prendo prima e ultima, ...)

Esercizio Cosa si può dire di $f(x) = g(x)$ con f e g convesse (supponendole strett. convesse e senza interi intervalli in cui coincidono).

— o — o —

Disuguaglianze di convessità : → JENSEN e derivati
→ KARAMATA

$\boxed{\text{JENSEN}}$ $f: A \to \mathbb{R}$ convessa. Allora per ogni $x_1, \dots, x_n$ punti di A e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ si ha che

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Dim. Caso $n=2$: $f(\underbrace{\lambda_1}_{\lambda} x_1 + \underbrace{\lambda_2}_{1-\lambda} x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

ed è vera per definizione di funzione convessa.

Supponiamola vera per n e dimostriamola per $n+1$

$$f(\underbrace{\boxed{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}}_{\lambda x} + \underbrace{\boxed{\lambda_{n+1}}}_{1-\lambda} \underbrace{\boxed{x_{n+1}}}_{y}) \leq$$ ho posto $\lambda = 1 - \lambda_{n+1}$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = (1-\lambda_{n+1}) \underbrace{f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n\right)} + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Qui posso usare l'ipotesi perché sono n variabili e la somma dei coeff. fa 1

$$\leq \lambda \left[\frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n) \right] + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Guardando il 1° e l'ultimo ho la tesi.

— o — o —

Caso particolare $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ ottengo

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

- Caso $\boxed{f(x) = x^2}$ $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$

Facendo la radice ottengo

$$\underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{media aritmetica}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}}_{\text{media quadratica}}$$

- $\boxed{\text{Caso } f(x) = \frac{1}{x} \text{ convessa per } x > 0}$

$$\frac{n}{x_1 + \dots + x_n} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + \dots + x_n} \qquad \text{oppure}$$

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}}_{\text{media armonica}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{media aritmetica}}$$

- $\boxed{\text{caso } f(x) = \log x}$ Questa è concava per $x > 0$ (cioè $-f$ è convessa), dunque tutto vale con i versi al contrario

$$\log\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} = \log \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

cioè $$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}_{\text{media geometrica}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{media aritmetica}}$$

Esercizio $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ $\qquad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q$ se $\underbrace{\frac{1}{p}}_{\lambda} + \underbrace{\frac{1}{q}}_{1-\lambda} = 1$