SSSUP 2013 - LEZIONE 019

Titolo nota 08/04/2013

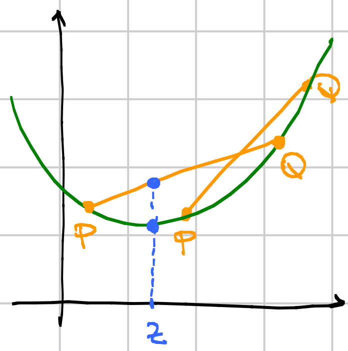
FUNZIONI CONVESSE

__Insiemi convessi__ Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice __convesso__ se per ogni coppia di p.ti $x \in A$, $y \in A$ si ha che il segmento di estremi x e y è tutto contenuto in A. Ci sono 3 tipi di insiemi convessi:

- tutto $\mathbb{R}$,
- semirette
- intervalli

} con o senza estremi

__Def. geometrica__ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso e sia $f : A \to \mathbb{R}$.
Si dice che f è __convessa__ se, per ogni coppia di p.ti P e Q del grafico, si ha che il grafico stesso sta "sotto" il segmento PQ



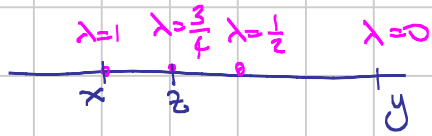
__Def. algebrica__ $f : A \to \mathbb{R}$ è __convessa__ se

$$\boxed{f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}$$

per ogni $x \in A$, $y \in A$, $\lambda \in [0,1]$.

__Equivalenza__: dati $x \in A$ e $y \in A$, l'espressione $\lambda x + (1-\lambda) y$ rappresenta, quando λ varia in $[0,1]$, rappresenta il generico p.to del segmento di estremi x e y. Supposto $x < y$, allora $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ verifica $x \le z \le y$ e inoltre

$$\lambda = \frac{y-z}{y-x} \qquad 1-\lambda = \frac{z-x}{y-x}$$



$$\underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda y))}_{f(z)} \le \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{\text{valore di } z \text{ della retta che passa per i p.ti del grafico corrispondenti a } x \text{ e } y.}$$

Indice (Convessità e regolarità) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa.

(1) f è continua in $Int(A)$ (= parte interna di A). Al bordo può essere discontinua

(2) f non è obbligata ad essere derivabile, ma f' dove esiste è monotona crescente

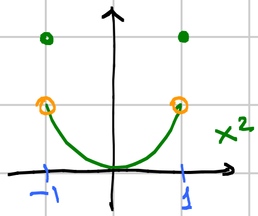
(3) f non è obbligata ad avere f'', ma f'' dove esiste è ≥ 0.

Def. Una funzione si dice <u>strettamente convessa</u> se nella definizione vale il $<$ stretto tutte le volte che $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$.

Esempi semplici ① $f(x) = |x|$ convessa ma non derivabile in $x=0$

② $A = [-1,1]$

$f(x) = x^2$ alzata al bordo



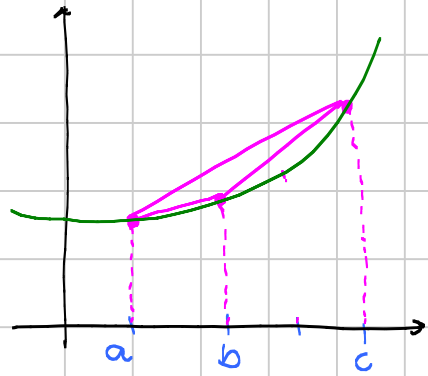
Questa non è continua.

Lemma (dei 3 rapporti incrementali)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Per ogni $a < b < c$ ($\in A$) si ha che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$



Dim. Scrivo $b = \lambda a + (1-\lambda)c$ dove $\lambda = \frac{c-b}{c-a}$. Per def. ho che

$$\lambda f(b) + (1-\lambda) f(b) = f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

Riorganizzando ottengo: $\lambda [f(b)-f(a)] \leq (1-\lambda)[f(c)-f(b)]$, cioè

$$\frac{c-b}{\cancel{c-a}}[f(b)-f(a)] \leq \frac{b-a}{\cancel{c-a}}[f(c)-f(b)]$$

Riorganizzando ancora ottengo 1^a frazione $\leq 3^a$ frazione.

Nuova partenza:

$$f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c) = \lambda f(a) + f(c) - \lambda f(c)$$

Riorganizzo: $\quad \lambda [f(c) - f(a)] \leq f(c) - f(b)$

Sostituisco a λ il suo valore e trovo un'altra disuguaglianza.

Per ottenere la 3ª disug. basta scrivere $\lambda f(a) = -(1-\lambda) f(a) + f(a)$ e riorganizzare (esercizio!).

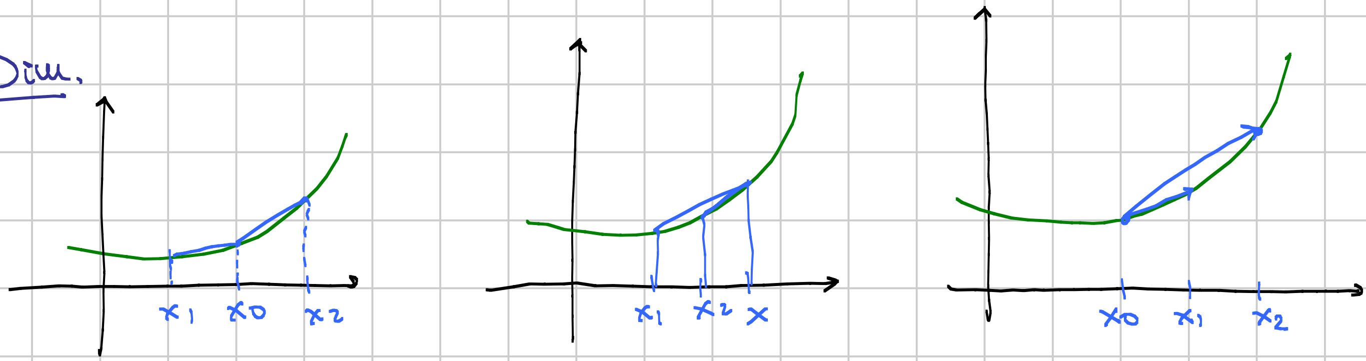
— o — o —

<u>Proposizione</u> Sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa. Consideriamo il rapporto incrementale

$$R_{x_0,x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \forall x \in A \setminus \{x_0\}$$

Allora fissato un qualunque $x_0 \in A$ si ha che $R_{x_0,x}$ è una funzione (debolmente) crescente di x

<u>Dim.</u>



Devo dim. che $\quad x_1 < x_2 \implies R_{x_0,x_1} \leq R_{x_0,x_2}$

A seconda dei 3 casi

- $x_0 < x_1 < x_2$
- $x_1 < x_2 < x_0$
- $x_1 < x_0 < x_2$

uso la parte che mi serve del lemma.

— o — o —

Detto altrimenti, la funzione

$$h \longrightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

è debolmente crescente dove è definita.

Teorema Sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa e sia $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$. Allora esistono

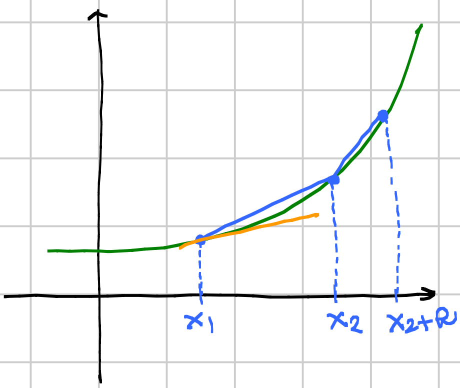
$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(Derivata dx)}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(Derivata sx)}$$

Inoltre si ha che $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ e $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, viste come funzioni della variabile x, sono debolmente crescenti

Dim.: tutto segue dalla monotonia del rapporto incrementale. Verifichiamo per esempio che $x \to f'_+(x)$ è deb. crescente

Solito lemma:

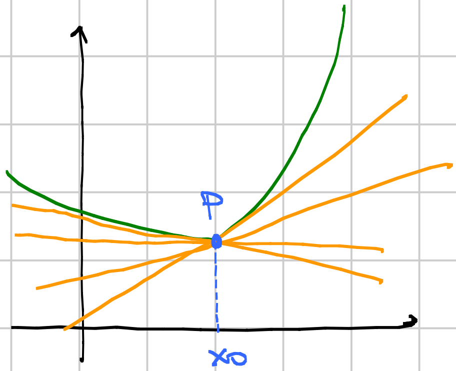


$$\frac{f(x_2+h) - f(x_2)}{h} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'_+(x_1)$$

Passando al limite per $h \to 0^+$ ho la tesi.

— o — o —

Interpretazione geometrica. La retta tangente al grafico non è obbligata ad esistere, ma possono esserci "due rette tangenti", una da destra e una da sinistra



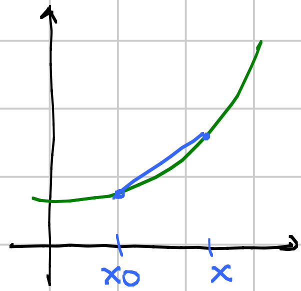
Teorema Per ogni $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ si ha che

$$f(x) \geq \underbrace{\boxed{m(x-x_0) + f(x_0)}}_{\text{retta per P con coeff. ang. } m} \qquad \forall x \in A$$

[$f(x)$ sta sopra le rette con coeff. angolare compreso fra la tg. sx e la tg. dx.]

Dim. Solito lemma dei coeff. angolari. Bisogna distinguere i casi $x > x_0$ e $x < x_0$.

Per esempio, quando $x > x_0$ abbiamo che



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'_+(x_0) \geq m$$

e ora basta moltiplicare per $x - x_0 > 0$ e riorganizzare.

Idem se $x < x_0$, con minimi cambi di segno.

— o — o —