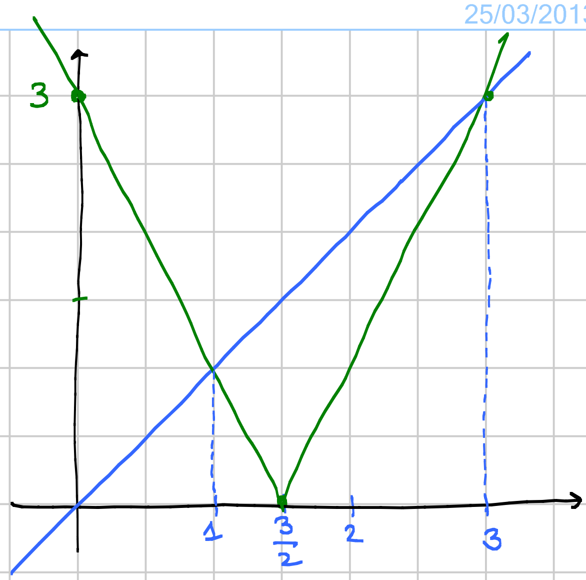
SSSUP 2013 — LEZIONE 18

Titolo nota 25/03/2013



Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = |2x_n - 3| \\ x_0 = \sqrt{2} \end{cases}$

Facile: se $x_0 > 3$ oppure $x_0 < 0$, allora $x_n \to +\infty$.

Consideriamo $x_0 = \sqrt{2}$.

Fatto 1 $0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(basta osservare che $0 \leq f(x) \leq 3$ per ogni $x \in [0, 3]$)

Fatto 2 Restano 2 possibilità

- x_n non ha limite
- $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, ma allora $\ell = 1$ oppure $\ell = 3$

Fatto 3 Se $x_n \neq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora x_n non può tendere a 3.

Dim.: Se x_n tendesse a 3, allora definitivamente avrei che $x_n \in [\frac{3}{2}, 3)$. Allora pongo $d_n := |x_n - 3|$ e verifico facilmente che $d_{n+1} = 2 d_n$ definitivamente, il che è assurdo.

Fatto 4 Se $x_n \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora x_n non può tendere ad 1.

Dim: ... sarebbe $x_n \in [0, \frac{3}{2}]$ definitiv... Pongo $d_n := |x_n - 1|$ e avrei che $d_{n+1} = 2 d_n$ definitiv., il che non è possibile a meno che non valga 0...

Fatto 5 Se $x_0 = \sqrt{2}$, allora $\boxed{x_n = k_n\sqrt{2} + h_n}$ (per induzione) per opportuni interi k_n ed h_n, con $k_n \neq 0$. Quindi x_n è sempre irrazionale, quindi non può essere mai $x_n = 1$ oppure $x_n = 3$.

Conclusione: x_n non ha limite e vaga senza meta dalla zona $[0, \frac{3}{2}]$ alla zona $[\frac{3}{2}, 3]$.
Questo è il CAOS.

Oss. Cosa causa il caos? La pendenza maggiore di 1 nei p.ti di intersezione.

— o — o —

Esempio 2 EQUAZIONE LOGISTICA

parametro

$$x_{n+1} = a\, x_n (1 - x_n)$$
$$x_0 = \frac{1}{2} \quad (o\ x_0 = \alpha \in [0,1])$$

Modello: x_n = densità di MAIALI in una certa zona al tempo $t = n$.

Modello semplice: $x_{n+1} = a\, x_n$

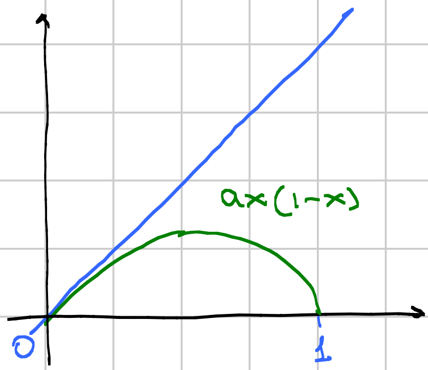
tasso di riproduttività

Cosa succede dipende dall'essere $a > 1$ o $a < 1$.

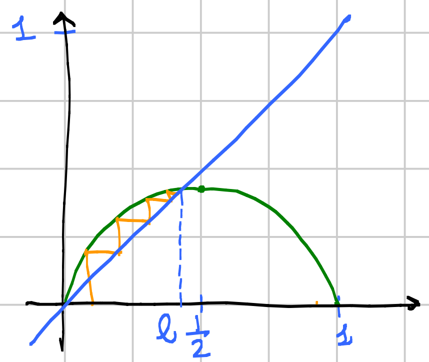
Il termine $(1 - x_n)$ pone un freno alla riproduzione quando la densità si avvicina ad 1.

Obiettivo: capire, in funzione di a, come vanno le cose, cioè il comportamento di x_n.

- Se $a \in [0,1]$, allora $f(x) = ax(1-x)$ sta sotto la bisettrice.
  È facile vedere che, qualunque sia $x_0 \in [0,1]$, si ha che $x_n \to 0$ decrescendo (piano con la monotonia).



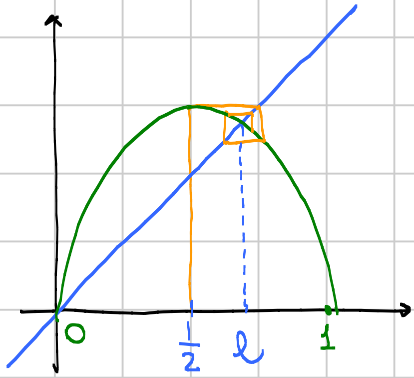
- Se $a \in (1,2]$, allora $f(x)$ interseca x nel tratto crescente.
  Indicata con l l'intersezione > 0, si ha che, per ogni $x_0 \in (0,1]$, $x_n \to l$



La convergenza avviene in modo definitivamente monotono.

- Se $a > 4$, partendo da $x_0 = \frac{1}{2}$ ottengo $x_2 < 0$, e il modello non ha molto senso.

- Se $a \in (2,4)$ e la derivata nel p.to di incontro ha valore assoluto minore di 1, allora c'è spiraleggiamento ad l.



$\cancel{l} = a\cancel{l}(1-l)$; $1 = a(1-l)$

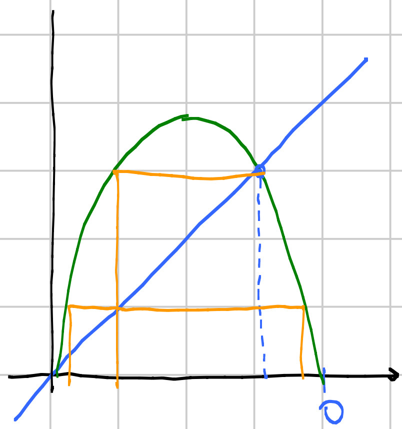
$1 - l = \frac{1}{a} \Rightarrow l = 1 - \frac{1}{a}$

$f'(x) = (ax - ax^2)' = a - 2ax \Rightarrow f'(l) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a - 2a + 2$
$= -a + 2$

$|f'(l)| \leq 1 \iff |-a+2| \leq 1 \iff \underset{a \leq 3}{-1 \leq -a+2} \underset{a \geq 1}{\leq 1} \iff$

Quindi per $a \in (2,3]$ c'è la possibilità di spiraleggiamento ad l
(Dim.: fare il piano con le 2 sottosuccessioni)

- Per $a \in (3,4]$ la successione non può tendere né a 0, né ad l, a meno che non valga 0 o non valga l ad un certo punto



N.B. È possibile arrivare in l in un numero finito di passaggi, se x_0 è fatto apposta.
Non è possibile arrivare ad l al limite.
Per gli altri valori di x_0 è il CAOS, come nell' esempio 1.

— o — o —

Back to $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$. Voglio dim. che esiste un unico valore di x_1 per cui x_n cresce circa come n, cioè per cui $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

Idea: pongo $y_n := \frac{x_n}{n}$ e vedo cosa risolve y_n:

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{ricor.}}}{=} \frac{x_n^2}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ x_n = n y_n}}{=} y_n^2 \frac{n}{n+1}$$

Quindi ora studio $y_{n+1} = y_n^2 \frac{n}{n+1}$

Ci aspettiamo che esista una soglia α_0 t.c.

- se $y_1 > \alpha_0$ si ha che $y_n \to +\infty$
- se $y_1 < \alpha_0$ si ha che $y_n \to 0$
- se $y_1 = \alpha_0$, allora $y_n \to 1$.

Punto chiave: capire che le zone A e B sono aperte.

Altro esempio: $x_{n+1} = (\arctan x_n)^n$