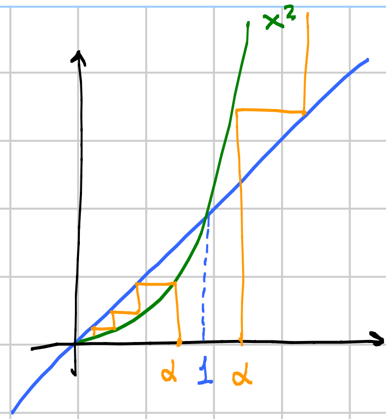
SSSUP 2013 - LEZIONE 17

Titolo nota 25/03/2013

VALORI SOGLIA



Esempio 0 $a_{n+1} = a_n^2$

$a_0 = \alpha \geq 0$

- Per $\alpha \in [0,1)$ si ha che $a_n \to 0$
- Per $\alpha \in (1,+\infty)$ si ha che $a_n \to +\infty$
- Per $\boxed{\alpha = 1}$ si ha che $a_n \equiv 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in particolare $a_n \to 1$

valore soglia.

Esempio 1 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \left(a_n + \frac{1}{n}\right) \\ a_1 = \alpha \geq 0 \end{cases}$ Studiare a_n al variare di α.

Fatto 1 Esistono α per cui $a_n \to +\infty$. Basta prendere un qualunque $\alpha \geq 1$ (la successione risulta maggiore di quella al p.to prec.)

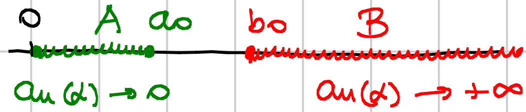
Fatto 2 Per comodità chiamiamo $a_n(\alpha)$ la succ. che parte con $a_1(\alpha) = \alpha$. Se per un certo α si ha che $a_n(\alpha) \to +\infty$, allora per ogni $\beta > \alpha$ si ha che $a_n(\beta) \to +\infty$

Dim. Basta dimostrare per induzione che $a_n(\beta) \geq a_n(\alpha)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Fatto 3 Esistono α per cui $a_n(\alpha) \to 0$. Basta prendere $\alpha = 0$.

Fatto 4 Se per un certo $\alpha > 0$ si ha che $a_n(\alpha) \to 0$, allora per ogni $\beta \in [0,\alpha]$ si ha che $a_n(\beta) \to 0$

Dim. Basta verificare che $0 \leq a_n(\beta) \leq a_n(\alpha)$ $\forall n \geq 1$.



Punto della situazione:

- c'è una zona A t.c.

  $a_n(\alpha) \to 0 \quad \forall \alpha \in A$
- c'è una zona B t.c. $a_n(\alpha) \to +\infty \quad \forall \alpha \in B$
- la zona A è tutta a sx della zona B.

È interessante considerare $b_0 = \inf B$ e $a_0 = \sup A$

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ La zona B è un <u>aperto</u>. Se lo dimostro, ho escluso che $b_0 \in B$.
Sia $\alpha \in B$. Voglio dimostrare che $a_n(\beta) \to +\infty$ per ogni β in un opportuno intorno $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ di α.
Visto che $a_n(\alpha) \to +\infty$, allora esiste di sicuro $\bar{n} \geq 1$ tale che $a_{\bar{n}}(\alpha) > 1$. Ora osservo che la funzione $\alpha \longrightarrow a_{\bar{n}}(\alpha)$ è una funzione continua, perché ottenuta come composizione di funzioni continue: ad esempio $a_2(\alpha) = \alpha(\alpha+1)$, $a_3(\alpha) = a_2(\alpha)\left(a_2(\alpha) + \frac{1}{2}\right)$, e così via...
Ma allora per continuità avremo che $a_{\bar{n}}(\beta) > 1$ per ogni $\beta \in$ intorno opportuno di α. Quindi è facile concludere che $a_n(\beta) \to +\infty$ per ogni $\beta \in$ intorno. (Sto usando che, appena supera 1, la succ. è condannata a tendere a $+\infty$).

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ La zona A è <u>aperta</u>. In particolare $a_0 \notin A$ e a maggior ragione $b_0 \notin A$ in quanto $b_0 \geq a_0$.

<u>Lemma</u> Se esiste un $\bar{m} \geq 1$ tale che $a_{\bar{m}+1}(\alpha) < a_{\bar{m}}(\alpha) < 1$, allora necessariamente $a_n(\alpha) \to 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per induzione si dimostra che $a_{m+1}(\alpha) \leq a_m(\alpha) \quad \forall m \geq \bar{m}$.
Infatti... al passo induttivo ritrovo...

$$a_{m+2} = a_{m+1}\left(a_{m+1} + \frac{1}{m+1}\right) \leq a_m\left(a_m + \frac{1}{m}\right) = a_{m+1}.$$

A questo punto i possibili limiti sono $l = 0$ e $l = 1$, ma questo...

Sia $\alpha \in A$, quindi $a_n(\alpha) \to 0$. Allora per forza esiste un $\bar{n}$ tale che $\quad a_{\bar{n}+1}(\alpha) < a_{\bar{n}}(\alpha) < 1$

vera frequentem.   vera definitivamente

Ma allora entrambe le disuguaglianze sono vere per ogni $\beta \in$ intorno opportuno di α, quindi per il lemma tutto l'intorno sta in A.

$\boxed{\text{Fatto 7}}$ Per $\alpha = a_0$ e per $\alpha = b_0$ si ha che $a_n \not\to +\infty$ e $a_n \not\to 0$.
Cosa può fare a_n? Ci sono due possibilità

- $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, e allora per forza $\ell = 1$
- a_n non ha limite.

Tuttavia per il lemma non è possibile che $a_{n+1} < a_n$ per un qualche n, quindi per forza $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma allora il limite esiste e fa per forza 1.

Oss. Qui non uso che sta sotto 1 se devo solo dim. l'esistenza del limite.

Conclusione: esiste almeno un valore di α per cui $a_n(\alpha) \to 1$.
Questo è vero per ogni $\alpha \in [a_0, b_0]$.

$\boxed{\text{Fatto 8}}$ $a_0 = b_0$. Consideriamo la successione $\underbrace{a_n(a_0)}_{= x_n}$ e $\underbrace{a_n(b_0)}_{= y_n}$.

Poniamo $d_n := y_n - x_n$ (= differenza). Intanto $d_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$.

stretto se $b_0 > a_0$

$$
\begin{aligned}
d_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} &= y_n\left(y_n + \frac{1}{n}\right) - x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) \\
&= y_n^2 - x_n^2 + \frac{1}{n}(y_n - x_n) \\
&= \left(y_n + x_n + \frac{1}{n}\right)(y_n - x_n) \\
&= \underbrace{\left(y_n + x_n + \frac{1}{n}\right)}_{\to 2} \cdot d_n
\end{aligned}
$$

Quindi definitivamente $\quad d_{n+1} \geq \frac{3}{2} d_n \quad$ da cui $d_n \to +\infty$

D'altra parte $d_n = y_n - x_n \to 0$.

$$\begin{array}{cc} y_n & x_n \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 \end{array}$$

L'assurdo è nato dal supporre che $d_n > 0$ per ogni $n \geq 1$

— o — o —

Esempio 2 $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{n} \qquad a_1 = \alpha > 0$

- Esistono dei dati per cui $a_n \to +\infty$
- " " " " " $a_n \to 0$
- Come prima A sta a sx di B.
- Quasi come prima A è una zona aperta
  (Lemma 1: Se $a_{\bar{n}} < \bar{n}$, allora da lì in poi è decrescente e tende a 0)
- Posto $b_0 = \inf B$ si ha che $a_n(b_0) \to +\infty$ (o $a_n < n$ per un certo n, ma allora tende a 0, o $a_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e allora tende a $+\infty$)

Idea: nella zona B le soluzioni tendono a $+\infty$ molto velocemente (più che esponenzialmente).
Per $\alpha = b_0$ la soluzione tende ancora a $+\infty$, ma circa come n.

— o — o —